代幾 I 演習 (2006/04/13)

問題 1

複素数 α, β に対して、次の等式が成立することを示しなさい。

1. $\mathrm{R}e(\alpha \pm \beta) = \mathrm{R}e(\alpha) \pm \mathrm{R}e(\beta)$
2. $\mathrm{I}m(\alpha \pm \beta) = \mathrm{I}m(\alpha) \pm \mathrm{I}m(\beta)$
3. $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$
4. $|\alpha| - |\beta| \leq |\alpha - \beta|$

問題 2　複素数 α_1, α_2 がそれぞれ、極形式

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= r_1(\cos(\theta_1) + i\sin(\theta_1)) \\ \alpha_2 &= r_2(\cos(\theta_2) + i\sin(\theta_2))\end{aligned}$$

で表されているとする。この時、次の等式が成立することを示しなさい。

1. $\alpha_1/\alpha_2 = (r_1/r_2)(\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2))$
2. $\alpha_1^n = r_1^n(\cos(n\theta_1) + i\sin(n\theta_1))\ (n \in \boldsymbol{N})$

問題 3　複素数 $z = x + iy$ に対して、e^z を次のように定義する。

$$e^z = e^x(\cos y + i\sin y)$$

この時、次の等式が成立することを示しなさい。

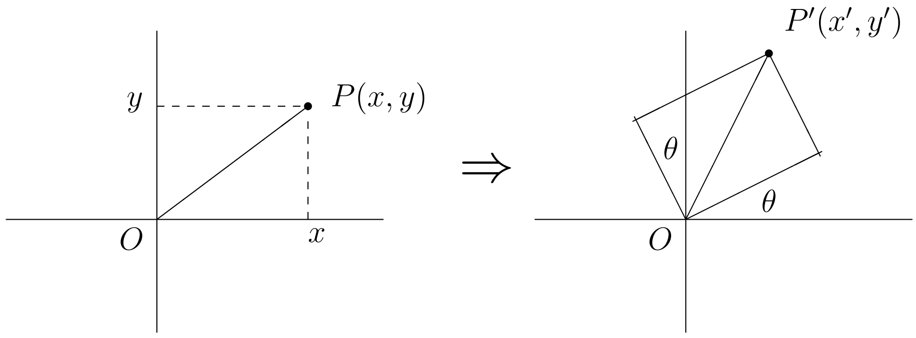
1. $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$
2. $e^{z_1-z_2} = e^{z_1}/e^{z_2}$
3. $(e^{z_1})^n = e^{nz_1}\ (n \in \boldsymbol{N})$

問題 4

1. 座標平面上の点 $P(x,y)$ を y 軸に関し対称移動した点の座標を x, y を用いて表せ。
2. 座標平面上の点 $P(x,y)$ を 直線 $y = x$ に関し対称移動した点の座標を x, y を用いて表せ。

3. 座標平面上の点 $P(x, y)$ を 原点に関し対称移動した点の座標を x, y を用いて表せ。

問題 5　座標平面上の点 $P(x, y)$ を原点を中心に θ 回転移動した点の座標を x, y, θ で表す式を、次の図を用いて導け。



問題 6　座標平面上の直線 $y = mx$ が x 軸となす角を θ とする。

1. m を θ を用いて表せ。
2. 座標平面上の点 $P(x, y)$ を 直線 $y = mx$ に関し対称移動した点の座標を x, y, m を用いて表せ。

問題 7　座標平面上の点 $P(x, y)$ を原点を中心に $-\theta$ 回転移動した点を $P_1(x_1, y_1)$, $P_1(x_1, y_1)$ を x 軸に関し対称移動した点を $P_2(x_2, y_2)$, $P_2(x_2, y_2)$ を原点を中心に θ 回転移動した点を $P'(x', y')$ とする。

1. x_1, y_1 を x, y, θ を用いて表せ。
2. x_2, y_2 を x_1, y_1 を用いて表せ。
3. x', y' を x_2, y_2, θ を用いて表せ。
4. x', y' を x, y, θ を用いて表せ。

問題 8　講義での複素数の演算の定義と実数の加法および乗法に関する性質を用いて、任意の複素数 $\alpha = a + bi$, $\beta = c + di$, $\gamma = e + fi$ に対し次が成り立つことを証明せよ。式の変形の際には、複素数の演算の定義、実数の加法および乗法に関する性質のうちどれを用いた

かも示せ。

(1) $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$ (加法についての結合法則)

(2) $\alpha+\beta=\beta+\alpha$ (加法についての交換法則)

(3) $\alpha+0=\alpha$ (加法についての単位元)

(4) $\alpha+(-1)\alpha=0$

(5) $(\alpha\beta)\gamma=\alpha(\beta\gamma)$ (乗法についての結合法則)

(6) $\alpha\beta=\beta\alpha$ (乗法についての交換法則)

(7) $\alpha\cdot 1=\alpha$ (乗法についての単位元)

(8) $\alpha(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma$ (分配法則)

(9) $\alpha\delta=1$ となる複素数 δ が存在する。(ただし、$\alpha\neq 0$ の時) (乗法の逆元の存在)

問題 9 複素数の絶対値と共役複素数についての次の性質を証明せよ。

(1) $\overline{\alpha+\beta}=\overline{\alpha}+\overline{\beta}$

(2) $\overline{\alpha\beta}=\overline{\alpha}\overline{\beta}$

(3) $\overline{\dfrac{1}{\alpha}}=\dfrac{1}{\overline{\alpha}}$

(4) $\overline{\overline{\alpha}}=\alpha$

(5) $\mid\overline{\alpha}\mid=\mid\alpha\mid$

(6) $\alpha\overline{\alpha}=\mid\alpha\mid^2$

(7) $\mid\alpha\beta\mid=\mid\alpha\mid\mid\beta\mid$

(8) $\mid\dfrac{1}{\alpha}\mid=\dfrac{1}{\mid\alpha\mid}$

問題 10

1. 複素数 α が実数であるための必要十分条件は $\alpha=\overline{\alpha}$ であることを示せ。
2. 複素数 α が純虚数 (実部が 0 の複素数) であるための必要十分条件は $\alpha=-\overline{\alpha}$ であることを示せ。

問題 11 次の複素数は実数であることを示せ。

1. $\alpha+\overline{\alpha}$, 2. $\alpha\overline{\beta}+\overline{\alpha}\beta$, 3. $(\alpha+\beta)(\overline{\alpha}+\overline{\beta})$.

問題 12

1. $\left(\dfrac{1+\sqrt{7}i}{2}\right)^n+\left(\dfrac{1-\sqrt{7}i}{2}\right)^n$ は実数であることを示せ。

2. $\left(\dfrac{1+\sqrt{7}i}{2}\right)^n - \left(\dfrac{1-\sqrt{7}i}{2}\right)^n$ は純虚数であることを示せ。

問題 13　実数 a, b, c, d についての等式

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac-bd)^2 + (ad+bc)^2$$

を複素数 α, β についての等式

$$|\alpha||\beta| = |\alpha\beta|$$

をもちいて導け。

問題 14　複素平面において α と β を表す点の間の距離は $|\beta-\alpha|$ であることを示せ。

問題 15　次の条件をみたす複素数 α の範囲を複素平面上に図示せよ。

1. $\alpha+\overline{\alpha}=2$,　2. $|\alpha+1|=2$,

3. $|\alpha-1|=|\alpha-i|$,　4. α^2 の偏角 $=\pi$.

問題 16　α, β, γ が複素数のとき,

$$\frac{\alpha+\beta}{2},\ \frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}$$

は複素平面上それぞれどのような点を表しているか。

問題 17　次の式をみたす複素数をすべて複素平面上に図示せよ。

1. $z^3=i$,　2. $z^5=-1$,　3. $z^2-z+1=0$,　4. $z^3=-1+i$.

問題 18　$z\neq 1$ の時に、等比数列の和の公式

$$1+z+z^2+\cdots+z^{n-1} = \frac{1-z^n}{1-z}$$

を利用して、次の等式を示せ。ただし、$\theta\neq 2m\pi$ $(m=0,\pm1,\pm2,\dots)$ とする。

1. $1+\cos\theta+\cos 2\theta+\cdots+\cos(n-1)\theta = \dfrac{1-\cos\theta+\cos(n-1)\theta-\cos n\theta}{2(1-\cos\theta)}$

2. $\sin\theta+\sin 2\theta+\cdots+\sin(n-1)\theta = \dfrac{\sin\theta+\sin(n-1)\theta-\sin n\theta}{2(1-\cos\theta)}$