代幾 I 演習 (2006/04/20)

例題　ドモアブルの公式を用いて cos と sin の倍角公式を同時に求めてみよう。

$$\cos 2\theta + i\sin 2\theta = e^{2i\theta} = (\cos\theta + i\sin\theta)^2$$

の右辺を展開すると，

$$\cos 2\theta + i\sin 2\theta = (\cos^2\theta - \sin^2\theta) + i\cdot 2\sin\theta\cos\theta$$

を得る。両辺の実部と虚部はそれぞれ等しいので，

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta,$$

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

となり倍角公式が同時に得られた。

問題 19　ドモアブルの公式を用いて、cos と sin の 3 倍角公式を求めよ。

問題 20

1. $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ を利用して，三角関数の積を和に直す公式，

   $$\cos\theta\sin\varphi = \frac{1}{2}(\sin(\theta+\varphi) - \sin(\theta-\varphi))$$

   を証明せよ。

   (ヒント: 右辺の形に注目して $\frac{1}{2}(e^{i(\theta+\varphi)} - e^{i(\theta-\varphi)})$ を用いることを考えてみよ。)

2. $\cos\theta\cos\varphi$ の公式と $\sin\theta\sin\varphi$ の公式を同時に導いてみよ。

問題 21　$r \neq 1$ であるような正の実数 r に対し、次の和を求めよ。

1. $1 + r\cos\theta + r^2\cos 2\theta + \cdots + r^{n-1}\cos(n-1)\theta$
2. $r\sin\theta + r^2\sin 2\theta + \cdots + r^{n-1}\sin(n-1)\theta$

問題 22　互いに素な正整数 a, b と整数 $0 \leq r < a$ と $0 \leq s < b$ が与えられている。
　このとき、a で割ると r 余り、b で割ると s 余る整数で 0 以上 ab 未満のものがちょうど一つあることを示せ。

問題 23　a, b の最大公約数を d とし，整数 x_0, y_0 は $ax_0 + by_0 = d$ を満すとする。このとき，$ax + by = d$ の整数解は整数 t を用いて

$$x = x_0 + \frac{bt}{d},\ y = y_0 - \frac{at}{d}$$

と書くことができることを示せ。

問題 24　$\alpha = 1 + i, \beta = 2 - i$ とする時、次の問に答えなさい。

1. 複素数 $\gamma = 4 + i$ を、二つの実数 a, b と複素数 α, β を利用して、$\gamma = a\alpha + b\beta$ と表せたとする。この時、実数 a, b を求めなさい。

2. 一般に複素数 $\delta = x + yi \quad (x, y \in \boldsymbol{R})$ が与えられた時、この複素数 δ を、複素数 α, β と、実数 p, q を用いて、$\delta = p\alpha + q\beta$ と表せる時に、この p, q を x, y を用いて表せ。

3. 二つの複素数 z_1, z_2 に対して、一方が他方の実数倍でない（即ち、任意の実数 c に対して $z_1 \neq cz_2$ かつ、 $z_2 \neq cz_1$ である）時、「任意の複素数 z 対して、ある実数 u, v が存在し、$z = uz_1 + vz_2$ と表せる」ことを示せ。

問題 25　二項定理の証明をしなさい（ヒント：講義では、略証明を行っている）

問題 26

$N[x] = \{f(x)|x$ を変数とする自然数係数多項式$\}$

$C[x] = \{f(x)|x$ を変数とする複素係数多項式$\}$

とした時に、それぞれ、$N[x]$ と、$C[x]$ が四則（和、差、積、商）と、多項式の合成に関して、閉じているならば、その証明を、閉じていないならば、その反例を挙げなさい。

問題 27　次の deg の性質を証明しなさい。

1. $\deg\,(f(x) \pm g(x)) \leq \max(\deg\,f(x), \deg\,g(x))$

2. $\deg\,(f(x)g(x)) = \deg\,f(x) + \deg\,g(x)$ (ただし、$f(x)$ も $g(x)$ も 0 でないとする)

3. $f(x) = h(x)g(x) + r(x)$ で $(g(x) \neq 0, h(x)$ は商$)$ の時 $\deg\,h(x) = \deg\,f(x) - \deg\,g(x)$

問題 28　$\deg\,f(g(x))$ を $\deg\,f(x)$ と $\deg\,g(x)$ で表すと、どうなるか？その関係を示し、証明しなさい。

問題 29　多項式 $f(x)$ を $x - a,\ x - b\ (a \neq b)$ で割った余りをそれぞれ r, s とするとき $f(x)$ を $(x - a)(x - b)$ で割った余りを求めよ。

問題 30　実係数の 3 次方程式 $x^3 + px + q = 0$ が虚根 $a + bi$ をもてば、$-2a$ も根であることを示せ。