代幾 I 演習 (2006/04/27)

問題 31　次の不等式を証明せよ。

1. $(ax+by+cz)^2 \leq (a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)$ (シュワルツの不等式)
2. $\sqrt{(a+x)^2+(b+y)^2+(c+z)^2} \leq \sqrt{(a^2+b^2+c^2)} + \sqrt{(x^2+y^2+z^2)}$ (三角不等式)

問題 32　複素数 $z = x + yi \quad (y \neq 0)$ に対して、zz' も $z + z'$ 共に実数になるならば、実は、z' は、z の共役複素数 $\bar{z}$ であることを示せ。

問題 33

極形式で記述された二つの複素数 $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1), z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ に対して、$\theta_1 - \theta_2 = n\pi \quad (n \in \boldsymbol{Z})$ の時、この二つの複素数は z_1, z_2 は**平行である** と呼ぶ[1]。

二つの複素数 $z_1, z_2 \quad (z_2 \neq 0)$ が平行であるための必要十分条件は、$\frac{z_1}{z_2}$ が実数の時、即ち、$\frac{z_1}{z_2} = \overline{(\frac{z_1}{z_2})}$ であることを示せ。

問題 34　二次方程式 $x^2 + px + q = 0$ が複素数解 $a + bi \quad (b \neq 0)$ を持つならば、もう一つの解は、$a - bi$ であることを証明せよ。

問題 35

極形式で記述された二つの複素数 $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1), z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ に対して、$\theta_1 - \theta_2 = \pm\frac{\pi}{2} + 2n\pi \quad (n \in \boldsymbol{Z})$ の時、この二つの複素数は z_1, z_2 は**直交する** と呼ぶ[2]。

二つの複素数 $z_1, z_2 \quad (z_2 \neq 0)$ が直交するための必要十分条件は、$\frac{z_1}{z_2}$ が純虚数の時、即ち、$\frac{z_1}{z_2} = -\overline{(\frac{z_1}{z_2})}$ であることを示せ。

問題 36　複素平面上の点 $P(x,y), A(x_1,y_1), B(x_2,y_2)$ とそれに対応する複素数 $z = x + yi, \alpha = x_1 + y_1 i, \beta = x_2 + y_2 i$ について次の問いに答えなさい。

1. 点 A を通り、ベクトル $\overrightarrow{OB}$ に平行な直線 l_1 上の点が P である為の必要十分条件は、それぞれ対応する複素数の間に $\bar{\beta}z - \beta\bar{z} = \bar{\beta}\alpha - \beta\bar{\alpha}$ の関係が成立することであることを証明せよ。
2. 二点 A, B を通る直線 l_2 上の点が P である為の必要十分条件は、それぞれ対応する複素数の間に $(\bar{\beta} - \bar{\alpha})z - (\beta - \alpha)\bar{z} = \bar{\beta}\alpha - \beta\bar{\alpha}$ の関係が成立することであることを証明せよ。

---

[1] これは、z_1, z_2 を複素平面上の点 P_1, P_2 に対応させた時に、ベクトル $\overrightarrow{OP_1}, \overrightarrow{OP_2}$ が平行である条件となっている。

[2] これは、z_1, z_2 を複素平面上の点 P_1, P_2 に対応させた時に、ベクトル $\overrightarrow{OP_1}, \overrightarrow{OP_2}$ が直交する条件となっている。

問題 37　複素平面上の点 $P(x,y), A(x_1,y_1), B(x_2,y_2)$ とそれに対応する複素数 $z=x+yi, \alpha=x_1+y_1 i, \beta=x_2+y_2 i$ について次の問いに答えなさい。

1. 点 A を通り、ベクトル $\overrightarrow{OB}$ に垂直な直線 l_3 上の点が P である為の必要十分条件は、それぞれ対応する複素数の間に $\bar{\beta}z+\beta\bar{z}=\bar{\beta}\alpha+\beta\bar{\alpha}$ の関係が成立することであることを証明せよ。

2. 線分 AB の垂直二等分線 l_4 上の点が P である為の必要十分条件は、それぞれ対応する複素数の間に $(\bar{\beta}-\bar{\alpha})z+(\beta-\alpha)\bar{z}=\bar{\beta}\beta-\alpha\bar{\alpha}$ の関係が成立することであることを証明せよ。

問題 38　点 $P(x,y)$ を原点を中心に θ だけ反時計周りに回転させた点を $Q(x',y')$ とする時、次の問に答えよ。

1. x', y' を、x,y,θ を用いて表せ。

2. $z=x+yi,\ z'=x'+y'i$ とする時に、z' を z,θ を用いて表せ。

3. 上記の関係で、$z'=cz$ となるように、c を θ を用いて表せ。

問題 39　x^2+1 で割ると $x-1$ 余り、x^2+x+1 で割ると $x+2$ 余るような多項式の内、次数がもっとも小さいものを求めよ。

問題 40

1. 三次方程式 $x^3+3px+q=0$ の根を α,β,γ としたとき、$(\alpha-\beta)^2(\beta-\gamma)^2(\gamma-\alpha)^2$ を p,q の多項式で表わせ。

2. $f(x)=x^3+3px+q$ としたとき，$f(x)=0$ が重根を持つための必要十分条件は $f(x)$ と $f'(x)=3x^2+3p$ が互いに素ではないことを示せ。また，この条件を p,q の多項式を用いて表せ。

問題 41　方程式 $x^7-1=0$ の根と係数の関係を用いて、次の等式を証明せよ。

$$1+\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}+\cos\frac{8\pi}{7}+\cos\frac{10\pi}{7}+\cos\frac{12\pi}{7}=0$$

問題 42

1. $\zeta=\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}$ とする。このとき、次の等式を示せ。

$$x^5-1=(x-1)(x-\zeta)(x-\zeta^2)(x-\zeta^3)(x-\zeta^4)$$

2. 自然数 n に対し、$\zeta=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}$ とおく。このとき、次の等式を示せ。

$$x^n-1=(x-1)(x-\zeta)(x-\zeta^2)\cdots(x-\zeta^{n-2})(x-\zeta^{n-1})$$