

代幾 I 演習 (2006/05/11)

[定義] (整数値多項式) x に関する一変数多項式 $f(x)$ が、「任意の整数 n に対して、 $f(n)$ もまた整数になる」場合、「その多項式 $f(x)$ は、整数値多項式である」と言う。

問題 43

1. n を整数とすると、 $n(n+1)(n+2)(n+3)$ は、常に $4! = 24$ で割切れることを示せ¹。
2. 一般に、 x に関する k 次式 $F_k(x)$ を次のように定める。

$$\begin{cases} F_0(x) &= 1 \\ F_{k+1}(x) &= F_k(x) \times \frac{(x+k)}{k+1} \quad (k \geq 0) \end{cases}$$

この時、 x が整数ならば、 $F_k(x)$ も整数になること、即ち、 $F_k(x)$ が整数多項式であることを示せ。

問題 44

1. x に関する n 次の一変数多項式 $f(x)$ が整数値多項式ならば、実は、ある整数 a_0, a_1, \dots, a_n を適切に選ぶことにより、問題 43 で定義された関数 $F_k(x)$ を用いて、 $f(x) = a_0 F_0(x) + a_1 F_1(x) + \dots + a_n F_n(x)$ と表せることを示せ。
2. 上の事実を用い、任意の自然数 n に対して $n^4 - 2n^3 + 11n^2 + 14n$ が、24 の倍数になることを示せ。

問題 45 x に関する n 次多項式 $f(x)$ が整数値多項式になるための必要十分条件は、 $k+1$ 個の連続する整数 $i = 0, 1, \dots, n$ に対して、 $f(i)$ が整数になることを示せ (ヒント: $f(x)$ が n 次の多項式ならば、 $f(x+1) - f(x)$ の次元が $n-1$ 以下になることを利用し、 $f(x)$ の次元に関する帰納法を適用する)。

問題 46

1. x に関する一次関数 $L_0(x), L_1(x)$ を、二つの相異なる実数 x_0, x_1 を用いて、次の様に定義する。

$$\begin{cases} L_0(x) &= \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \\ L_1(x) &= \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \end{cases}$$

¹ $n!$ は、負でない整数 n に対して、 $n! = 1 \times 2 \times \dots \times n$ で定義され「 n の階乗」と呼ぶ。従って、 $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ となる。ただし、 $0! = 1$ と定める。

この時、二点 $(x_0, y_0), (x_1, y_1)$ を通る一次関数 $y = f(x)$ は、次のように表すことができることを示せ。

$$y = f(x) = L_0(x)y_0 + L_1(x)y_1 = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1)$$

2. 一般に、 $n + 1$ の相異なる実数 x_0, x_1, \dots, x_n に対して、 $n + 1$ 個の多項式 $L_{n,k}(x)$ を次のように定める。

$$L_{n,k}(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \cdots (x - x_n)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1) \cdots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \cdots (x_k - x_n)} = \prod_{i=0, i \neq k}^n \frac{x - x_i}{x_k - x_i}$$

この時、任意の関数 $f(x)$ に対して次の多項式 $P(x)$ ²を考える。

$$P(x) = f(x_0)L_{n,0}(x) + f(x_1)L_{n,1}(x) + \cdots + f(x_n)L_{n,n}(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i)L_{n,i}$$

すると、実は、 $f(x_i) = P(x_i)$ ($i = 0, 1, \dots, n$) となることを示せ。

問題 47 多項式 $f(x) = c_0x^n + c_1x^{n-1} + \cdots + c_{n-1}x + c_n$ を考える。相異なる $n + 1$ 個の複素数 $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ に対して、 $f(a_0) = f(a_1) = \cdots = f(a_n) = 0$ となるならば、 $c_0 = c_1 = \cdots = c_n = 0$ であることを証明せよ。

問題 48 多項式 $f(x) = c_0x^n + c_1x^{n-1} + \cdots + c_{n-1}x + c_n$, $g(x) = d_0x^n + d_1x^{n-1} + \cdots + d_{n-1}x + d_n$ に対し、 $h(x) = f(x) - g(x)$ に前の問題の結果を適用することで次を証明せよ。
 $c_0 = d_0, c_1 = d_1, \dots, c_n = d_n$ であるための必要十分条件は相異なる $n + 1$ 個の複素数 $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ に対して、 $f(a_0) = g(a_0), f(a_1) = g(a_1), \dots, f(a_n) = g(a_n)$ となることである。

問題 49 多項式 $f(x), g(x)$ は $(x^2 + 1)f(x) + (x^2 + x + 1)g(x) = 1$ を満たすとする。

1. $(x^2 + x + 1)g(x)$ は $x^2 + x + 1$ で割り切れ、 $x^2 + 1$ で割ると 1 余ることを示せ。
2. $f(x)$ を用いて、 $x^2 + 1$ で割ると割り切れ、 $x^2 + x + 1$ で割ると 1 余る多項式をひとつ求めよ。
3. $(x + 3)(x^2 + 1)f(x) + (x^2 + x + 1)g(x)$ を $x^2 + 1, x^2 + x + 1$ で割った余りを求めよ。
4. $x^2 + 1$ で割ると $x - 1$ 余り、 $x^2 + x + 1$ で割ると $x + 2$ 余るような多項式を求めよ。
5. $x^2 + 1$ で割ると $x - 1$ 余り、 $x^2 + x + 1$ で割ると $x + 2$ 余るような多項式で次数が 3 以下のものはちょうど一つあることを示せ。

²この関数を、Lagrange の補間多項式と呼ぶ。

問題 50 複素係数の多項式 $f(x) = x^3 + (-2 - i)x^2 + (1 + 2i)x + (4 + 3i)$ とその係数をすべて共役複素数で置き換えた多項式 $g(x) = x^3 + (-2 + i)x^2 + (1 - 2i)x + (4 - 3i)$ を考える。

1. a が $f(x) = 0$ の根ならば \bar{a} は $g(x) = 0$ の根となることを示せ。
2. $f(x) = (x - a)(x - b)(x - c)$ と因数分解されるとき、 $g(x)$ を因数分解せよ。
3. $f(x)g(x)$ は実係数の多項式となることを示せ。