

代幾 I 演習 (2006/05/18)

【定義】(集合が演算に関して閉じている)

ある集合 S とその要素に関する演算 \oplus が与えられた時に、「 S の任意の要素に対して、演算が定義されており、その結果が、再び S の要素になる ($\forall x, y \in S[x \oplus y \in S]$)」ならば、「 S は、演算 \oplus に関して閉じている」と言います。そして、そうでない場合は「閉じていない」と言います。例えば、自然数全体の集合 N は、加法演算 $+$ に関して閉じていますが、減法演算 $-$ に関しては閉じていません。また、偶数全体の集合 E は、加法演算 $+$ に関して閉じていますが、奇数の集合 O は、同じ加法演算 $+$ に関して閉じていません。この様に、「閉じている・いない」は、与えられた集合と演算の関係で決ることが解ります¹。

問題 51

1. 整数全体の集合 Z が、和、差、積に関して閉じていることを利用して、有理数の集合全体の集合 Q も和、差、積に関して閉じていることを示せ。
2. 実数 R が、和、差、積に関して閉じていることを利用して、複素数全体の集合 C が和、差、積に関して閉じていることを示せ。

問題 52

1. 有理数全体の集合 Q から、0 と取り除いた集合を $Q^*(= Q - \{0\} = \{x|x \in Q, x \neq 0\})$ とする時、 Q^* は、乗算と除算の両方で閉じていることを示せ。ただし、 Z が加減乗算に関して閉じていることを利用してよい。
2. 同様にして、上記の Q^* は、加算に関して閉じていないことを示せ。
3. 正の有理数全体の集合 $Q^+ = \{x|x \in Q, x > 0\}$ は加算、乗算、除算に関して閉じていることを示せ。

問題 53 複素数の実部と虚部が共に正であるような集合を $C^+(= \{x + yi|x, y \in R, x > 0, y > 0\})$ とする時に、次の問いに答えなさい。

1. C^+ は、和に関して閉じていることを示せ (実数 R が和に関して閉じていることを利用してよい)。
2. C^+ は、積に関して閉じていないことを示せ。

¹一般に、自然数の集合 N が、和、積に関して閉じていること、実数全体の集合 R が、和、差、積に関して閉じていることも、それぞれ証明できるが、それらを示すには、それぞれ自然数や実数に関する定義に立ち戻って証明する必要があるので、普通は成立するものとして扱う。それに対して、整数、有理数、複素数全体の集合 Z, Q, C が和、差、積に関して閉じていることは、自然数や、実数が閉じていることを利用して簡単に示すことができる (以下の課題)。なお、除算は、0 で割ることができないので閉じていないが、これらの集合から 0 を取り除いた集合 $Q - \{0\}, R - \{0\}, C - \{0\}$ を考えると、これは除算に関しても閉じていることが解る。

【定義】(剰余類)

整数 x と自然数 p が与えられた時に、 x を p を割った余りを $\overline{x_p} (= x \bmod p)$ (あるいは、 p が明らかな場合に、 p を省略して、単に \overline{x}) で表すことにします。ただし、余り $\overline{x_p}$ は $x = pq + \overline{x_p}, q \in \mathbb{Z}, 0 \leq \overline{x_p} \leq p - 1$ を満す整数とします。

そして、この余りだけを集めた集合を $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \{\overline{x_p} | x \in \mathbb{Z}\}$ を剰余類と呼びます²。

問題 54

1. $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ 上の和 ($\overline{+}$)、差 ($\overline{-}$)、積 ($\overline{\times}$) をそれぞれ次のように定義するとき、 $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ は、これらの演算に関して閉じていることを示せ。

$$\text{和 } \overline{x} \overline{+} \overline{y} = \overline{x + y}$$

$$\text{差 } \overline{x} \overline{-} \overline{y} = \overline{x - y}$$

$$\text{積 } \overline{x} \overline{\times} \overline{y} = \overline{x \times y}$$

ただし、 \mathbb{Z} が、和、差、積に関して閉じていることを用いてよい。

2. $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ 上の二つの要素 $\overline{x}, \overline{y}$ 対して、もし、 $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ の要素 \overline{z} が $\overline{x} = \overline{y} \overline{\times} \overline{z}$ を満す時、 \overline{z} を \overline{x} を \overline{y} で割った商と呼び、 $\overline{x}/\overline{y}$ で表す。また、この商を求める演算を $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ 上の除算と呼ぶことにする。

(a) $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} - \{\overline{0}\}$ は、除算に関して閉じていることを示しなさい (ヒント: $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ は要素が 5 つしかないので、 $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} - \{\overline{0}\}$ は要素が 4 つしかない。実際に 4×4 の除算表を書き、その結果が全て存在することを示せばよい)。

(b) $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} - \overline{0}$ は、除算に関して閉じていないことを示しなさい (ヒント: $\overline{x}/\overline{z}$ が存在しないような、具体的な x, y の組を一つ示せばよい)。

問題 55

1. R を係数とする x に関する多項式全体の集合を $R[x] = \{f(x) | f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i, i \in \mathbb{Z}^+, a_0 \in R\}$ とするとき、 $R[x]$ が、積に関して閉じていることを示せ。

問題 56 集合 $Q[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} | a, b \in Q\}$ について、次の問いに答えなさい³。

1. $Q[\sqrt{2}]$ が積に関して閉じていることを示せ。
2. $Q[\sqrt{2}]$ から、0 を取り除いた集合を $Q^*[\sqrt{2}] = Q[\sqrt{2}] - \{0\} = \{a + b\sqrt{2} | a, b \in Q^*\}$ とするとき、 $Q^*[\sqrt{2}]$ が除算に関して閉じていることを示せ。

²この集合は、形式的には、無限集合の形に記述されているが、実際は、要素が丁度 p 個の有限集合である。

³このような集合 $Q[\sqrt{2}]$ を、「 Q に $\sqrt{2}$ を付加した集合」と呼ぶ。

問題 57 集合 $S = \mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6}] = \{a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Q}\}$ について、次の問いに答えなさい。

1. S が積に関して閉じていることを示せ。
2. S から、0 を取り除いた集合を S^* とするとき、 S^* が除算に関して閉じていることを示せ。

問題 58 整係数の二次方程式 $x^2 + bx + c = 0 (a, b \in \mathbb{Z})$ の二つの根の内の一つを α とした時、集合 $S = \mathbb{Q}[\alpha] = \{x + y\alpha \mid x, y \in \mathbb{Q}\}$ について、次の問いに答えなさい。

1. S が積に関して閉じていることを示せ。
2. S から、0 を取り除いた集合を S^* とするとき、 S^* が除算に関して閉じていることを示せ。

問題 59 次の整数の組の最大公約数を求めよ。

1. $a = 30, b = 22$ 2. $a = 84, b = 60$, 3. $a = 252, b = 270$,
4. $a = 12345654321, b = 1234321$, 5. $a = 832040, b = 2584$, 6. $a = 2^{30} - 1, b = 2^{18} - 1$.

問題 60 次の式をみたすような整数 x, y を一組求めよ。

1. $7x + 5y = 1$ 2. $13x + 11y = 1$, 3. $30x + 42y = 6$.

問題 61 問題 59 のそれぞれの問に対し、 d を a と b の最大公約数とした時、 $ax + by = d$ となる整数 x, y を一組求めよ。

問題 62

1. $7x + 11y = 1$ となるような整数 x, y を一組求めよ。
2. 上の問の x を用いて、7 で割ると割り切れ 11 で割ると 1 余る整数をひとつ求めよ。
3. $14x + 55y$ を 7 で割った余りと、11 で割った余りを求めよ。
4. 7 で割ると 3 余り、11 で割ると 2 余る整数を求めよ。
5. 7 で割ると 3 余り、11 で割ると 2 余る整数で 0 以上 77 未満のものがちょうど一つあることを示せ。

問題 63

1. $(x - y)^2$ は x, y についての対称式であることを示せ。

2. ω を $\omega^3 = 1$ となる $\omega \neq 1$ であるような複素数とする。 $(x + y + z)(x + \omega y + \omega^2 z)(x + \omega^2 y + \omega z)$ は x, y, z についての対称式であることを示せ。
3. $(x_1 x_2 - x_3 x_4)(x_1 x_3 - x_2 x_4)(x_1 x_4 - x_2 x_3)$ は x_1, x_2, x_3, x_4 についての対称式であることを示せ。

問題 64 次の対称式を基本対称式の多項式で表わせ。

1. $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$,
2. $x^3 + y^3$,
3. $x^3 + y^3 + z^3$,
4. $x^2(y + z) + y^2(z + x) + z^2(x + y)$.

例題 ここでは対称式 $f(x, y, z) = (x + y)^3 + (y + z)^3 + (z + x)^3$ を基本対称式の多項式として表わす別の方法を考えることにする。

$f(x, y, z)$ は基本対称式 $s_1 = x + y + z$, $s_2 = xy + yz + zx$, $s_3 = xyz$ の多項式として表わすことができるが $f(x, y, z)$ が 3 次の同次式であることより、

$$f(x, y, z) = as_1^3 + bs_1s_2 + cs_3$$

と置くことができる。

この式の x, y, z に適当に数を代入してみると $-2c = f(1, 1, -2) = 6$, $8a + 2b = f(1, 1, 0) = 10$, $a - 2b = f(2, -1, 0) = -1$ が得られる。これより、 $a = 1$, $b = 1$, $c = -3$ となるので、

$$f(x, y, z) = s_1^3 + s_1s_2 - 3s_3$$

となることがわかる。

この方法は交代式を対称式と差積の積で表わすときにも用いることができる。

問題 65 実数を係数とする n 次方程式 $f(x) = 0$ の根を重複度も込めて、 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ とする。このとき、 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ の差積の 2 乗

$$\prod_{i < j} (\alpha_j - \alpha_i)^2 = \begin{matrix} (\alpha_2 - \alpha_1)^2 & (\alpha_3 - \alpha_1)^2 & \cdots & (\alpha_n - \alpha_1)^2 \\ & (\alpha_3 - \alpha_2)^2 & \cdots & (\alpha_n - \alpha_2)^2 \\ & & \cdots & \\ & & & (\alpha_n - \alpha_{n-1})^2 \end{matrix}$$

は実数であることを示せ。

問題 66 次の交代式を差積と基本対称式で表わせ。

1. $(x - y)^3 + (y - z)^3 + (z - x)^3$,
2. $(x - y)^5 + (y - z)^5 + (z - x)^5$.