代幾 I 演習 (2006/06/01)

問題 67　直角三角形 ABC ($\angle C$ を直角とする) に対して、ベクトル $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}$ を、それぞれ $\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ と表すとき、次の問いに答えなさい。

1. 一般に、二つのベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ に対して、$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2 = |\boldsymbol{a}|^2 + 2(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + |\boldsymbol{b}|^2$ が成立することを示せ。
2. $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$ であることと、$\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$(すなわち $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 0$) を利用して、ピタゴラスの定理 (三平方の定理) を証明しなさい。

問題 68　次の問いに答えなさい。

1. 三つのベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ に対して、$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{c}$ の交角を θ_1, $\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{c}$ の交角を θ_2 とし、また、$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の長さは等しいとする。この時、$\theta_1 = \theta_2 \Rightarrow (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ を示せ。
2. 二等辺三角形 ABC (ただし、AB = AC とする) に対して、$\angle A$ の角の二等分線と、底辺 BC の交点を P とするときに、実は、P は、底辺 BC を二等分することを、ベクトルの長さと内積を用いて示せ。(ヒント：$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{AB}, \boldsymbol{b} = \overrightarrow{AC}, \boldsymbol{c} = \overrightarrow{AP}$ とすれば、前小問の結果が利用できる。後は、$\overrightarrow{BP} = \boldsymbol{c} - \boldsymbol{a}$ であることを利用すれば...)

問題 69　次の平面幾何学の問題 (内心) を、ベクトルの長さと内積を用いて証明しなさい。

1. 三角形 ABC の各々の角の二等分線の交点が、一点で交わることを示せ。
2. その点が三角形 ABC の内接円の中心であることを示せ。

問題 70　次の平面幾何学の問題 (外心) を、ベクトルの長さと内積を用いて証明しなさい。

1. 三角形 ABC の各々の辺の垂直二等分線の交点が、一点で交わることを示せ。
2. その点が三角形 ABC の外接円の中心であることを示せ。

問題 71　$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ とする。

1. $\boldsymbol{K}^3$ の単位ベクトル $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ をそれぞれ $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ の線型結合で表せ。
2. 上の問の結果を利用して，次のベクトルを $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ の線型結合で表せ。

   (a) $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$,　(b) $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$,　(c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

問題 72 $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ は $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ の線型結合として表すことはできないことを示せ。

問題 73

Text (p.3) の定理 [1.1]、並びに 定理 [1.2] は、図形的に証明を行っている行っているが、空間ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ が、それぞれ以下のような成分を用いて、表現されているとして、これらを成分の計算の立場から証明しなさい。 (注意: 何れの定理も三つの等式からなるが、それを全て示すこと)

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

1. 定理 [1.1] が空間ベクトルについて成立することを、成分の計算によって示せ。
2. 定理 [1.2] が空間ベクトルについて成立することを、成分の計算によって示せ。

問題 74 Text (p.6) の定理 [1.3] の内積の性質の内、(7), (8), (9) を、空間ベクトルの成分表示を用いて示せ。

問題 75 空間ベクトルの三つの基本ベクトル

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

を用いて、任意の空間ベクトル

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

は、この三つの基本ベクトルの線型和

$$\boldsymbol{v} = xe_1 + ye_2 + ze_3$$

で表現できることは学んだ (Text p.5) が、この表現が一意であることを示せ。(ヒント：$\boldsymbol{v}$ が $\boldsymbol{v} = x'e_1 + y'e_2 + z'e_3$ の様に、表現できると仮定すると、実は、$x = x', y = y', z = z'$ が成立することを示せばよい)

問題 76　空間ベクトルの三つの基本ベクトル e_1, e_2, e_3 について、次の問いに答えなさい。

1. この基本ベクトルは互いに直交していることを示せ。

2. 任意の空間ベクトル $\boldsymbol{v}$ は、この基本ベクトルと内積を用いて、次のように表現できることを示せ。

$$\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{v}, e_1)e_1 + (\boldsymbol{v}, e_2)e_2 + (\boldsymbol{v}, e_3)e_3$$

問題 77　次を証明せよ。

1. 平面ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ が線型従属ならば、ある $u, v(\in \boldsymbol{R})$ (ただし、u, v のどちらか一方が 0 でない) があり、$u\boldsymbol{a} + v\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ となることを示せ。(ヒント：平面上の原点を通る直線の方程式は $ax + by = 0$ [ただし a, b の内どちらかは 0 でない] として表すことができる。$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ が線型従属ならば、これらを位置ベクトルとする点 A, B の座標が同一直線上にあるので..)

2. 上記の逆を示せ。すなわち、ある $u, v(\in \boldsymbol{R})$ (ただし、u, v のどちらか一方が 0 でない) があり、$u\boldsymbol{a} + v\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ となるならば、平面ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ が線型従属であることを示せ。

問題 78　次を証明せよ。

1. 空間ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ が線型従属ならば、ある $u, v, w(\in \boldsymbol{R})$ (ただし、u, v, w のいずれかの内、少くても一つが 0 でない) があり、$u\boldsymbol{a} + v\boldsymbol{b} + w\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$ となることを示せ。(ヒント：平面上の原点を通る直線の方程式は $ax + by + cz = 0$ [ただし a, b, c の内、いずれか一つは 0 でない] として表すことができるので..)

2. 上記の逆を示せ。すなわち、ある $u, v, w(\in \boldsymbol{R})$ (ただし、u, v, w のいずれかの内、少くても一つが 0 でない) があり、$u\boldsymbol{a} + v\boldsymbol{b} + w\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$ となるならば、平面ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ が線型従属であることを示せ。

[**定義**] 上記の二つの大問の結果を拡張することによって、より一般的に次の形で、$n(> 0)$ 個のベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ に対する線型独立並びに線型従属が次のように定義される (平面ベクトルや、空間ベクトルの性質はこの定義の特殊な場合である)。

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n\text{が線型独立} &\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall c_1, c_2, .., c_n (\in R) s.t. \sum_{i=1}^{n} c_i \boldsymbol{a}_i \neq \boldsymbol{0} \\
&\quad\ (\text{ただし、}c_i\text{の少くても一つは}0\text{でない}) \\
\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n\text{が線型従属} &\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n\text{が線型独立でない} \\
&\Leftrightarrow \exists c_1, c_2, .., c_n (\in R) s.t. \sum_{i=1}^{n} c_i \boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{0} \\
&\quad\ (\text{ただし、}c_i\text{の少くても一つは}0\text{でない})
\end{aligned}$$

問題 79　次を証明せよ。

1. 一つのベクトルが線型従属ならば、そのベクトルは零ベクトルであることを示せ。
2. 三つの平面ベクトルは常に線型従属であることを示せ。
3. 四つの空間ベクトルは常に線型従属であることを示せ。

問題 80

1. 二つの平面ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ が共に、$\boldsymbol{0}$ ベクトルでなく、また、互いに、直交するならば、この二つのベクトルは線型独立であることを示せ。
2. 三つの空間ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ が、いずれも $\boldsymbol{0}$ ベクトルでなく、また、どの二つを取っても互いに直交するならば、実は、この三つのベクトルは線型独立であることを示せ。
3. 一般に、$n(>0)$ 個のベクトルに対して、どれも $\boldsymbol{0}$ ベクトルでなく、しかも、その中の任意の相異なる二つのベクトルが直交するのであれば、この n 個のベクトルは線型独立であることを示せ。

問題 81　次を証明せよ。

1. $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ の中に同じベクトルが 2 個以上現れるなら $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ は線型従属である。
2. $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ の中に零ベクトル $\boldsymbol{0}$ が現れるならば、$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ は線型従属である。

問題 82　n 個の $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ に対して、もし、その内の幾つかのベクトルが線型従属になっていたら、全体も線型従属になることを示せ。

問題 83　n 個のベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ が線型独立であれば、その内から $i(0 < i < n)$ 個のベクトルを任意に選んでも、それらが線型独立になることを示せ。(ヒント：前問の結果を利用し、背理法を使えば..)

問題 84　n 個ののベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ に対して、その中からどの $n-1$ 個のベクトルを取ってきても線型独立だが、n 個全部だと線型従属になってしまうような組み合わせが存在することを示せ。(ヒント：最初に互いに線型独立な $n-1$ 個の線型独立な $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_{n-1}$ を考え、$\boldsymbol{a}_n$ を、この $n-1$ 個のベクトルの線型結合で表すと...)

問題 85　$\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ が与えられたとする。$\boldsymbol{b}$ が $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ の線型結合として異なる方法で

$$\begin{aligned} \boldsymbol{b} &= c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{a}_n \\ \boldsymbol{b} &= c_1'\boldsymbol{a}_1 + c_2'\boldsymbol{a}_2 + \cdots + c_n'\boldsymbol{a}_n \end{aligned}$$

と書けたとする (すなわち、$c_i \neq c_i'$ となるような i が少くても一つはある。)。このとき $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ は線型従属であることを示せ。