代幾 I 演習 (2006/06/08)

問題 86　二つの空間ベクトルの $\boldsymbol{v},\boldsymbol{u}$ がそれぞれ次のように成分表示されているとする。

$$\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix},\boldsymbol{u}=\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

この時、この二つのベクトルの内積が、成分を用いて、次のようになることは学んだ (Text p.6 の (2) 式)。

$$(\boldsymbol{v},\boldsymbol{u})=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$$

これを次の事実を用いて導け。

- 空間ベクトルの単位ベクトル e_1,e_2,e_3 に関してだけは、内積を次の様に定義する[1]。

$$(e_i,e_j)=\delta_{i,j}=\begin{cases} 1 & (i=j\text{ の時}) \\ 0 & (i\neq j\text{ の時}) \end{cases}$$

- 内積の性質 (Text p.6 の定理 [1.3] (7) - (9))。
- 任意の空間ベクトルは、単位ベクトルの線型結合で表すことができる (Text p.5)。

問題 87　二次元の点を、原点を中心に α だけ反時計回りに回転させる行列を R_α とすると、その行列の成分は、次のようになる。

$$R_\alpha=\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

講義の定義では、R_α と R_β の積 ($R_\beta R_\alpha$) を、図形的な意味から $R_{\alpha+\beta}$ で定義した (Text p.16)。

これが、一般的な行列の積の定義と矛盾していないことを示しなさい。

問題 88　A を実数を成分とする二行二列 (二次の正方行列)、$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ を二次元 (平面) の縦ベクトル、c を実数とすると、次の線型性が成立することを示しなさい。

$$A(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=(A\boldsymbol{x})+(A\boldsymbol{y})$$

$$(cA)\boldsymbol{x}=A(c\boldsymbol{x})$$

(ヒント:行列 A 並びに、ベクトル $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ を成分表示し、等号の左辺と右辺の結果が同じであることを示せばよい)

[1] この定義に用いられる記号 $\delta_{i,j}$ を**クロネッカーの記号** (Text p.35 参照) と呼ぶ。

問題 89　A, B を $(2,2)$ 行列とする。

1. $AB = BA$ ならば

$$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2,$$

$$(A+B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$$

となることを証明せよ。

2. $(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$ となるような行列 A, B の例を与えよ。

問題 90　二つの二次の正方行列 A, B に関して、行列間の等号「$A = B$」を、「$\forall \boldsymbol{x} \in V^2$ s.t. $A\boldsymbol{x} = B\boldsymbol{x}$」で定義する（つまり、「任意の平面ベクトル $\boldsymbol{x}$ に対して、$A\boldsymbol{x} = B\boldsymbol{x}$ が成立」した時に、「$A = B$」とする）。この時、行列 A, B の成分に関して、次の性質が成り立つことを示しなさい。

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \text{に対して、} A = B \Leftrightarrow \begin{cases} a &= e \\ b &= f \\ c &= g \\ d &= h \end{cases}$$

(ヒント: 右から左 ($\Leftarrow$) は、単に、$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ を成分表示し、その計算結果を比較すればよい。逆 ($\Rightarrow$) も、同様に行っても良いが、特別なベクトル $\boldsymbol{e}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ に関しても、$A\boldsymbol{e}_0 = B\boldsymbol{e}_0, A\boldsymbol{e}_1 = B\boldsymbol{e}_1$ が成立することを利用した方が簡単になる)

問題 91　互いに直交する 0 でない二つのベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ に対し、それぞれへの射影子を、$P_{\boldsymbol{x}}, P_{\boldsymbol{y}}$ で表すとする。この時、次の等式を証明しなさい。

1. $P_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}, P_{\boldsymbol{y}}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}$

2. $P_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{y} = P_{\boldsymbol{y}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

3. $P_{\boldsymbol{x}} + P_{\boldsymbol{y}} = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

4. $P_{\boldsymbol{x}} \cdot P_{\boldsymbol{y}} = O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(ヒント:この二つのベクトルは、独立なので、任意の平面ベクトル $\boldsymbol{z}$ が、実は、ある実数の組 a, b を用いて、$\boldsymbol{z} = a\boldsymbol{x} + b\boldsymbol{y}$ と表されることを利用すれば...)

問題 92　行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の逆行列 A^{-1} が次の形

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \quad (\text{ただし、}|ad-bc| \neq 0 \text{ の時})$$

で表されているとする。

この時、二つの変数 x, y に関する、次の連立方程式

$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases} \qquad \cdots [1]$$

について、次の問に答えなさい。

1. $AA^{-1} = A^{-1}A = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ であることを示しなさい。
2. 上記の行列 E は、任意のベクトル $\boldsymbol{z}$ に対して、$E\boldsymbol{z} = \boldsymbol{z}$ となることを示しなさい。
3. 行列 A, ベクトル $\boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$ を用いて、上記の連立方程式 [1] を表しなさい。
4. もし、行列 Aが、逆行列を持つ（すなわち、$|ad-bc| \neq 0$ の時）場合、$A^{-1}\boldsymbol{p}$ が、上記の連立方程式 [1] の解となることを示しなさい。
5. 連立方程式

$$\begin{cases} au + bv = 0 \\ cu + dv = 0 \end{cases} \qquad \cdots [2]$$

の解 $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ を考える。すると、もし、$\boldsymbol{z}$ が方程式 [1] の解ならば、$\boldsymbol{z} + \boldsymbol{w}$ も、また方程式 [1] の解になることを示しなさい。

6. 上記の性質を利用して、連立方程式 [1] の解が一つしかないならば、連立方程式 [2] は、$\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 以外の解を持たないことを示しなさい。

問題 93　座標平面を原点を中心にして、反時計まわりに θ 回転移動したとき、点 $P(x, y)$ の移る先の点を $P(x', y')$ とする。

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ に $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ を対応させる写像 T は $\boldsymbol{R}^2$ から R^2 への線型写像であることを示せ。

問題 94　上と同様のことを、原点を通る直線に関する対称移動について示せ。

問題 95　$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とおく。

1. $J^2 = -E$ であることを示せ。
2. $a, b, c, d, e, f \in \boldsymbol{R}$ とする。このとき、次を示せ。ただし、i は虚数単位である。
$$(a+bi)+(c+di) = e+fi \iff (aE+bJ)+(cE+dJ) = eE+fJ,$$
$$(a+bi)(c+di) = e+fi \iff (aE+bJ)(cE+dJ) = eE+fJ.$$
3. $(4E-3J)A = E$ となる行列 A を求めよ。
4. $(aE+bJ)(cE+dJ) = (cE+dJ)(aE+bJ)$ であることを示せ。

問題 96　線型空間の公理

1. $\vec{a}+\vec{b} = \vec{b}+\vec{a}$ (交換法則)
2. $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c} = \vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ (結合法則)
3. $\exists\vec{0}\forall\vec{a}[\vec{a}+\vec{0} = \vec{0}+\vec{a} = \vec{a}]$ (零元 [単位元] の存在)
4. $\forall\vec{a}\exists(\vec{-a})[\vec{a}+(\vec{-a}) = (\vec{-a})+\vec{a} = \vec{0}]$ (逆元の存在)
5. $c(\vec{x}+\vec{y}) = c\vec{x}+c\vec{y}$ (スカラー倍の分配則 I)
6. $(c+d)\vec{x} = c\vec{x}+d\vec{x}$ (スカラー倍の分配則 II)
7. $(cd)\vec{x} = c(d\vec{x})$ (スカラー倍の結合法則)

について、次の問に答えなさい。

1. 零元の性質を満す元は一つしかないことを証明しなさい (零元の uniqueness [ユニークネス:唯一性])。
2. 任意の元 $\vec{x}$ に対して、その 0 倍した元 $0\vec{x}$ は、零元であることを証明しなさい。
3. 任意の元 $\vec{x}$ に対して、その逆元の性質を満す元は、それぞれ一つしかないことを証明しなさい (逆元の uniqueness)。

問題 97

複素数全体の集合 $\boldsymbol{C}$ の要素 $\boldsymbol{x} = a+bi, \boldsymbol{y} = c+di$ と 実数 e に関して、普通に和 ($\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} = (a+c)+(b+d)i$) と、定数倍 ($e\boldsymbol{x} = (ea)+(eb)i$) を考えると、$\boldsymbol{C}$ 全体は、実数上の線型空間になっていることを確かめなさい。

(ヒント:線型空間の公理 (8 つある) が、全て成立することを示せばよい)