

代幾 I 演習 (2006/06/29)

問題 122 A, B, C を (m, n) 行列、 c, d を複素数、 O を (m, n) 型の零行列とした時に、次の定理を証明しなさい。

1. $A + O = A, \quad A - A = O$
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$
3. $A + B = B + A$
4. $c(A + B) = cA + cB$
5. $(c + d)A = cA + dA$
6. $(cd)A = c(dA)$
7. $1A = A, \quad 0A = O$

問題 123 A, B を (l, m) 行列、 C, D を (m, n) 行列、 $O_{p,q}$ を (p, q) 型の零行列とする時に、次の定理を証明しなさい。

1. $A(C + D) = AC + AD$
2. $(A + B)C = AC + BC$
3. $AO_{m,n} = O_{l,n}, \quad O_{l,m}C = O_{l,n}$

問題 124 T を 3 次元ベクトル空間 K^3 から 2 次元ベクトル空間 K^2 への線型写像とし、 e_1, e_2, e_3 を K^3 の標準基底とする。

$$T(e_1) = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad T(e_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad T(e_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

のとき次を計算せよ。

$$(1) \quad T\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad (2) \quad T\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}\right), \quad (3) \quad T\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}\right).$$

問題 125

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

とした時、 K^n の標準基底 e_1, e_2, \dots, e_n に対し、 Ae_i ($1 \leq i \leq n$) を計算し、

$$A = (Ae_1 \ Ae_2 \ \cdots \ Ae_n)$$

となることを示せ。

問題 126 e_1, e_2, e_3, e_4 を K^4 の標準基底とする。

$Ae_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $Ae_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $Ae_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $Ae_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ となるような $(2, 4)$ 行列 A を求めよ。

問題 127

$$X = \begin{pmatrix} x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y & 1 \\ 0 & 0 & 0 & y \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a \\ b & 1 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

とする。区分けによる計算を用いて $X^2, X^3, A^2, A^3, AX, XA$ を求めよ。

問題 128 次の行列 A, B のうち積 AB が可能なものはどれか。またそのとき AB の行の数、列の数はどうなるか。

1. A は $(2, 4)$ 行列、 B は $(2, 3)$ 行列。
2. A は $(2, 3)$ 行列、 B は $(3, 3)$ 行列。
3. A は $(3, 1)$ 行列、 B は $(3, 3)$ 行列。
4. A は $(1, 4)$ 行列、 B は $(4, 2)$ 行列。
5. A は $(3, 1)$ 行列、 B は $(1, 2)$ 行列。
6. A は $(4, 2)$ 行列、 B は $(4, 2)$ 行列。

問題 129 次の条件を満たす行列 A, B の例を作ってみよ。

1. 積 AB は定義できるが BA は定義できない。
2. AB, BA はどちらも定義できるが次数が異なる。
3. AB, BA はどちらも 2 次行列になるが、 $AB \neq BA$ となる。
4. AB, BA はどちらも 2 次行列で、 $AB = BA$ となる。

問題 130 次の計算をせよ。

$$1. \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 3 & -2 & 6 \end{pmatrix}, \quad 2. \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix},$$

$$3. \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad 4. \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 5 & 2 \end{pmatrix},$$

問題 131 $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 2 & -4 \end{pmatrix}$ とする。行列の積の結合法則を利用して A^5 を計算せよ。

問題 132

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

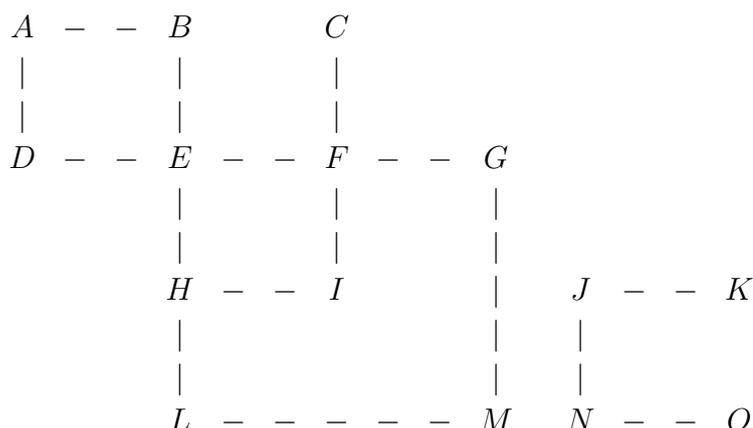
の時、次の行列の計算を行いなさい。

1. AB ,
2. BA ,
3. AC ,
4. CA ,
5. AD ,
6. DA

問題 133 $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ とおく。

1. J^2, J^3, J^4, J^5 を求めよ。
2. 二項定理を利用して $(E + J)^{10}$ を求めよ。

問題 134 次の図の様に、A ~ O の間に道がある時に次の問に答えなさい。



1. 行列 $X = (x_{\alpha\beta})$ (但し $\alpha = A \sim O, \beta = A \sim O$) とし、

$$x_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1 & (\alpha \text{ と } \beta \text{ の間に道がある時}) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

と定める時 (例えば、A と B の間には道があるので x_{AB} は 1、A と C の間には道がないので、 x_{AC} は 0 となる) の X を求めなさい。

2. $Y = (y_{\alpha\beta}) = X^2$ とした時に、 $y_{\alpha\beta}$ の値は、どんな意味を持つか？

3. D から、丁度 4 回、道を渡った時に到達する (但し、同じ場所や同じ道を何度通っても良いとする) ことができる場所はどこどこか？ また、その時、そこに到る道の種類は全部で何通りか？

問題 135 演習書の p.10 の類題 4 を解きなさい。

問題 136 演習書の p.12 の類題 6 を解きなさい。

問題 137

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

の時、次の行列の計算をしなさい。

1. AB , 2. BA 3. A^2 , 4. B^2