代幾 I 演習 (2006/09/28)

問題 138

$$
A=\begin{pmatrix}
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\
0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1\\
0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\
1&0&0&0&1&0&0&0&1&0&0&0&1&0&0&0\\
0&1&0&0&0&1&0&0&0&1&0&0&0&1&0&0
\end{pmatrix}
$$

の時、A^n を求めなさい。

問題 139　次の行列の計算をしなさい。

$$
\begin{pmatrix}-1&0\\1&0\\1&-1\\0&1\\0&-1\\0&1\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}1&-1&0&0&0&1\\1&0&1&0&1&0\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\\0&0\\0&-1\\1&1\\1&0\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}0&1&1&0&0&1\\0&-1&0&1&0&1\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\\1&0\\-1&1\\1&0\\0&1\end{pmatrix}
$$

問題 140

$$
A=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&-1&1\\0&0&1\end{pmatrix}
$$

とした時に次の値を求めなさい。

1. A^2,　2. A^4,　3. A^{16},　4. A^{40}

問題 141　$(3,2)$-行列 A に対し、5 次行列 B を

$$B = \left(\begin{array}{c|c} E_3 & A \\ \hline O & E_2 \end{array}\right)$$

と定める。ただし、E_3, E_2 はそれぞれ 3 次と 2 次の単位行列である。

1. $B^2 = \left(\begin{array}{c|c} E_3 & 2A \\ \hline O & E_2 \end{array}\right)$ であることを示せ。
2. B^n を求めよ。
3. B は正則行列であることを示せ。

問題 142　(k,l) 行列 A, (l,m) 行列 B, (m,n) 行列 C に対し、${}^t(ABC) = {}^tC\,{}^tB\,{}^tA$ となることを示せ。

問題 143　A,B,C を n 次正則行列とする。このとき、$(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$ となることを示せ。

問題 144　A を n 次正則行列とする。${}^t(AA^{-1}) = {}^t(A^{-1}A) = {}^tE = E$ を用いて $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$ が成り立つことを示せ。

問題 145　A を n 次行列とする。この時、次の問に答えなさい。

1. A^2 が正則行列ならば、実は、A 自身も正則行列であることを示せ。
2. A が正則行列ならば、任意の整数 k に対して A^k も正則行列であることを示せ。

問題 146　A,B を次の様な形をした n 次対角行列とする。この時、次の問に答えなさい。

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & b_3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & b_n \end{pmatrix}$$

1. 二つの行列の積 AB を求めなさい。
2. A が逆行列を持つ条件と、A がその条件を満す時の A の逆行列を求めなさい。