

代幾 I 演習 (2006/10/12)

問題 147 n 次行列 A に対して $\text{tr}(A)$ で、 A の固有和 (trace:トレース) を表すとする ($A = \{a_{ij}\}$ の時、 $\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$)。この時、 P が正則行列であれば、 $\text{tr}(P^{-1}AP) = \text{tr}(A)$ であることを示せ。

問題 148 A, B, X を n 次行列、 E を n 次の単位行列とするとき、次の間に答えなさい。

1. A が正則ならば、 $AX = B$ を満す行列 X は一意に決ることを示しなさい。

2. $E - A$ が正則ならば、 $\sum_{i=0}^k A^i = (E - A^{k+1})(E - A)^{-1}$ であることを示しなさい。

問題 149 次の行列の逆行列を求めなさい。

$$1. \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad 2. \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad 3. \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

問題 150 次の行列の逆行列を求めなさい。

$$1. \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad 2. \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad 3. \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

問題 151 n 次行列 $J_n = (\delta_{i,n-j+1})(1 \leq i, j \leq n)$ (ただし、 $\delta_{i,j}$ はクロネッカーのデルタで、 $\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & (i=j \text{ の時}) \\ 0 & (\text{その他の時}) \end{cases}$ と定義されている) について、次の間に答えなさい。

1. n 次の正方行列 $A = (a_{ij})$ に対して AJ_n を求めなさい。

2. n 次の正方行列 $A = (a_{ij})$ に対して J_nA を求めなさい。

3. J_n は、正則行列であることを示し、その逆行列 J_n^{-1} を求めなさい。

問題 152 以下の表は、各々の野菜に 1 kg 中に含まれる、様々な栄養素の含有量である。

食品名	エネルギー	たんぱく質	炭水化物	ビタミン C	鉄
アスパラガス・若茎	220	26	39	150	7
えだまめ	1350	117	88	270	27
グリーンピース	930	153	69	190	17
かぶ・葉	200	23	39	820	21
かぼちゃ	490	16	109	160	5

また、次の表は、食堂でのある一日の三食で消費された食材の量 (kg 単位) である。

食事	アスパラガス・若茎	えだまめ	グリーンピース	かぶ・葉	かぼちゃ
朝	2	0	1	0	0
昼	0	0	0	0	3
夜	0	2	0	0	0

これについて、以下の問いに答えなさい。

1. $A = (a_{\alpha\beta})$ に対して、 $a_{\alpha\beta} = (\text{食品 } \alpha \text{ が含む栄養素 } \beta \text{ の含有量})$ と定めた時、 A を求めなさい。
2. えだまめを 2kg, かぶを 3kg, かぼちゃを 1kg 食べた時のそれぞれの栄養の含有量を求めなさい。
3. 食堂での朝、昼、晩に消費された食材に含まれるたんぱく質と、ビタミン C の含有量を求めなさい。

問題 153 三つのベクトル

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

について、次の問いに答えなさい。

1. \mathbf{x} と \mathbf{y} の内積 (\mathbf{x}, \mathbf{y}) を求めなさい。
2. \mathbf{x} と \mathbf{z} の外積 $\mathbf{x} \times \mathbf{z}$ を求めなさい。
3. \mathbf{y} と \mathbf{z} が作る平行四辺形の面積を求めなさい。
4. $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ が作る平行六面体の体積を求めなさい。
5. \mathbf{x} に平行で、点 $(0, 0, 1)$ を通る直線の方程式を求めなさい。
6. \mathbf{y} に垂直で、点 $(1, 1, 1)$ を通る平面の方程式を求めなさい。