

## 代幾 I 演習 (2006/10/12)

問題 147  $n$  次行列  $A$  に対して  $\text{tr}(A)$  で、 $A$  の固有和 (trace:トレース) を表すとする ( $A = \{a_{ij}\}$  の時、 $\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$ )。この時、 $P$  が正則行列であれば、 $\text{tr}(P^{-1}AP) = \text{tr}(A)$  であることを示せ。

問題 148  $A, B, X$  を  $n$  次行列、 $E$  を  $n$  次の単位行列とすると、次の間に答えなさい。

1.  $A$  が正則ならば、 $AX = B$  を満す行列  $X$  は一意に決ることを示しなさい。

2.  $E - A$  が正則ならば、 $\sum_{i=0}^k A^i = (E - A^{k+1})(E - A)^{-1}$  であることを示しなさい。

問題 149 次の行列の逆行列を求めなさい。

$$1. \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad 2. \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad 3. \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

問題 150 次の行列の逆行列を求めなさい。

$$1. \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad 2. \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad 3. \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

問題 151  $n$  次行列  $J_n = (\delta_{i,n-j+1})(1 \leq i, j \leq n)$  (ただし、 $\delta_{i,j}$  はクロネッカーのデルタで、 $\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & (i = j \text{ の時}) \\ 0 & (\text{その他の時}) \end{cases}$  と定義されている) について、次の間に答えなさい。

1.  $n$  次の正方行列  $A = (a_{ij})$  に対して  $AJ_n$  を求めなさい。

2.  $n$  次の正方行列  $A = (a_{ij})$  に対して  $J_nA$  を求めなさい。

3.  $J_n$  は、正則行列であることを示し、その逆行列  $J_n^{-1}$  を求めなさい。

問題 152 以下の表は、各々の野菜に 1 kg 中に含まれる、様々な栄養素の含有量である。

食品名	エネルギー	たんぱく質	炭水化物	ビタミン C	鉄
アスパラガス・若茎	220	26	39	150	7
えだまめ	1350	117	88	270	27
グリーンピース	930	153	69	190	17
かぶ・葉	200	23	39	820	21
かぼちゃ	490	16	109	160	5

また、次の表は、食堂でのある一日の三食で消費された食材の量 (kg 単位) である。

食事	アスパラガス・若茎	えだまめ	グリーンピース	かぶ・葉	かぼちゃ
朝	2	0	1	0	0
昼	0	0	0	0	3
夜	0	2	0	0	0

これについて、以下の問いに答えなさい。

1.  $A = (a_{\alpha\beta})$  に対して、 $a_{\alpha\beta} = (\text{食品 } \alpha \text{ が含む栄養素 } \beta \text{ の含有量})$  と定めた時、 $A$  を求めなさい。
2. えだまめを 2kg, かぶを 3kg, かぼちゃを 1kg 食べた時のそれぞれの栄養の含有量を求めなさい。
3. 食堂での朝、昼、晩に消費された食材に含まれるたんぱく質と、ビタミン C の含有量を求めなさい。

問題 153 三つのベクトル

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

について、次の問いに答えなさい。

1.  $\mathbf{x}$  と  $\mathbf{y}$  の内積  $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  を求めなさい。
2.  $\mathbf{x}$  と  $\mathbf{z}$  の外積  $\mathbf{x} \times \mathbf{z}$  を求めなさい。
3.  $\mathbf{y}$  と  $\mathbf{z}$  が作る平行四辺形の面積を求めなさい。
4.  $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$  が作る平行六面体の体積を求めなさい。
5.  $\mathbf{x}$  に平行で、点  $(0, 0, 1)$  を通る直線の方程式を求めなさい。
6.  $\mathbf{y}$  に垂直で、点  $(1, 1, 1)$  を通る平面の方程式を求めなさい。