代幾 I 演習 (2006/10/19)

【群の定義】集合 G の元 a, b に対し、**積**と称する第三の元 (これを ab で表す。また、a, b から ab を求める操作を *(***二項***)* **演算** と呼ぶ。) が定まり、次の三つの命題 (この三つの命題を**群の公理** と呼ぶ。) を満すとき、G は (その積を求める演算に関して) **群** (group) であるという (cf. 教科書 p.248 参照)。

1. (結合法則) $\forall a, b, c \in G\,[(ab)c = a(bc)]$
2. (単位元の存在) **単位元** と称する特別な元 e がただ一つ存在して、G の全ての元 a に対して $ae = ea = a$ が成立する 。
3. (逆元の存在) G の任意の元 a に対して、$ax = xa = e$ となるような元 x が存在する。これを a の **逆元** と呼び a^{-1} で表す。

[例題 1] 整数全体 $\boldsymbol{Z}$ は、加法 $(+)$ に関して、群である。

(proof) 以下のようにして、$\boldsymbol{Z}$ 上で、加法は群の三つの公理を全て満すことが解るので、$\boldsymbol{Z}$ は加法に関して群を成す。

1. $\forall a, b, c \in \boldsymbol{Z}$に対して $(a+b)+c = a+(b+c)$ なので、結合法則を満す。
2. $0 \in \boldsymbol{Z}$ であり、$\forall a \in \boldsymbol{Z}$に対して $a+0 = 0+a = a$ なので、0 は $\boldsymbol{Z}$ の加法に対する **単位元** である。
3. $\boldsymbol{Z}$ の任意の要素 a に対して、$x = -a$ とすれば、$x = -a \in \boldsymbol{Z}$ であり、$a + x = a + (-a) = 0, x + a = (-a) + a = 0$ となるので、$x = -a$ は、a の逆元となる。すなわち、$\boldsymbol{Z}$ の任意の要素に対して、逆元が存在する。

[例題 2] 自然数 $\boldsymbol{N}$ は、加法 $(+)$ に関して、群にならない [1] 。

(proof) $\boldsymbol{N}$ の中には、$1 + x = 1$ となるような x が存在しない (もし、$1 + x = 1$ とすると、$x = 0$ とならなければならないが、0 は $\boldsymbol{N}$ に含まれない)。したがって、単位元が ($\boldsymbol{N}$ の中に..) 存在しない。すなわち、群の公理の二つ目の性質 (単位元の存在) を満さないので、$\boldsymbol{N}$ は、加法 $(+)$ に関して、群にならない。

[例題 3] 自然数 $\boldsymbol{N}$ は、乗法 $(\times)$ に関して、群にならない。

(proof) $\boldsymbol{N}$ の乗法に関する単位元は 1 である (これは $\boldsymbol{N}$ に含まれる) が、$2 \times x = 1$ となる x は $\boldsymbol{N}$ に含まれないので、2 に対する逆元が $\boldsymbol{N}$ に含まれない。すなわち、群の三つ目の公理 (逆元の存在) が成立しないので、$\boldsymbol{N}$ は、乗法に関して群にならない。

[例題 4] 有理数全体の集合 $\boldsymbol{Q}$ から 0 を取り除いた集合を $\boldsymbol{Q}^{*}(= \boldsymbol{Q} - \{0\})$ とすると、$\boldsymbol{Q}$ は、乗法 $(\times)$ に関して、群になる。

(proof) 以下のようにして、$\boldsymbol{Q}^{*}$ 上で、乗法は群の三つの公理を全て満すことが解るので、$\boldsymbol{Z}$ は加法に関して群を成す。

[1] ここでは、「自然数」を高校までと同様「正の整数 ($\boldsymbol{N} = \{1, 2, 3, ...\}$)」と考えることにする。ただし、大学の数学では、自然数に 0 を含めるの普通である。

1. $\forall a,b,c \in \boldsymbol{Q}^*$に対して $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$ なので、結合法則を満す。
2. $1 \in \boldsymbol{Q}^*$ であり、 $\forall a \in \boldsymbol{Z}$に対して $a \times 1 = 1 \times a = a$ なので、1 は $\boldsymbol{Q}^*$ の乗法に対する **単位元** である。
3. $\boldsymbol{Q}^*$ の任意の要素 a に対して、$x = 1/a$ とすれば、$x = 1/a \in \boldsymbol{Q}^*$ であり ($0 \notin \boldsymbol{Q}^*$ であることに注意。)、$a \times x = a \times (1/a) = 1, x \times a = (1/a) \times a = 1$ となるので、$x = 1/a$ は、a の逆元となる。すなわち、$\boldsymbol{Q}^*$ の任意の要素に対して、逆元が存在する。

これらを参考に、次の問題を解きなさい。

問題 154

1. 複素数全体の集合 $\boldsymbol{C}$ は、加法に関して群となることを示せ。
2. 複素数全体の集合 $\boldsymbol{C}$ は、乗法に関して群とならないことを示せ。
3. 複素数全体の集合 $\boldsymbol{C}$ から 0 を取り除いた集合 $\boldsymbol{C}^*(= \boldsymbol{C} - \{0\})$ は、乗法に関して群になることを示せ。

問題 155　複素数全体の集合 $\boldsymbol{C}$ から -2 を取り除いた集合 $\boldsymbol{C}^*(= \boldsymbol{C} - \{-2\})$ 上の演算 $\cdot$ を $x \cdot y = (x+2)(y+2) - 2$ と定義する。ここで、$\boldsymbol{C}^*$ は $\cdot$ に関して群を成すことを示すために、以下の問いに答えよ。

1. 演算 $\cdot$ が結合法則を満す。すなわち $\forall x,y,z \in \boldsymbol{C}^*[(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)]$ であることを示せ。
2. 演算 $\cdot$ の単位元、即ち $\forall x \in \boldsymbol{C}^*[x \cdot e = e \cdot x = x]$ となる e を求めよ。
3. $a(\in C^*)$ の逆元、即ち $a \cdot x = x \cdot a = e$ となる x を a を用いて表せ。

問題 156　K (K は C(複素数) あるいは、R(実数) を考えている。) を成分とする n 次の正方行列全体の集合 $M_{n,n}(K) = \{A|A$ は n 次正方行列$\}$ は、行列の足し算に関して、群になることを示しなさい (ヒント：上記の三つの公理をみたしていることをそれぞれ示せばよい。) 。

問題 157　n 次の正方行列全体の集合 $M_{n,n}(K)$ は、行列の掛け算に関して、群になっていないことを示しなさい (ヒント：上記の三つの公理の少くても一つは成立していないので、その成立していない公理を示し、どのような場合に成立していないかを述べればよい。) 。

問題 158　n 次の正則行列全体の集合 $GL(n,K) = \{A|A$ は n 次の正方行列で、逆行列を持つ$\}$ は、行列の掛け算に関して、群になることを示しなさい。

問題 159　n 次の正則行列全体の集合 $GL(n, K)$ は、行列の足し算に関して、群になっていないことを示しなさい。

問題 160　n 次のエルミート行列全体の集合 E は、行列の掛け算に関して、群になっていないことを示しなさい。

問題 161　n 次のユニタリ行列全体の集合 U は、行列の掛け算に関して、群になることを示しなさい。

問題 162　n 次のエルミート行列全体の集合 E は、行列の足し算に関して、群になることを示しなさい。

問題 163　n 次のユニタリ行列全体の集合 U は、行列の足し算に関して、群になっていないことを示しなさい。

問題 164　演習書の次の問題を解きなさい。

1. p.6 の類題 1 の 1. の (1)
2. p.6 の類題 1 の 1. の (2)
3. p.6 の類題 1 の 2.
4. p.6 の類題 1 の 3. の (1)
5. p.6 の類題 1 の 3. の (2)
6. p.6 の類題 1 の 3. の (3)

問題 165　演習書の次の問題を解きなさい。

1. p.7 の類題 2 の 1. の X
2. p.7 の類題 2 の 1. の Y
3. p.7 の類題 2 の 2. の X
4. p.7 の類題 2 の 2. の Y
5. p.8 の類題 3 の A
6. p.8 の類題 3 の B
7. p.8 の類題 3 の C

[対称行列と交代行列]

n 次行列 A が $A = {}^t A$ をみたすとき A を対称行列といい、$A = -{}^t A$ をみたすとき A を交代行列という。

問題 166 　行列 A が交代行列ならば、A の対角要素は 0 であることを示せ。

問題 167 　行列 A が、対称行列かつ交代行列ならば、実は、A は、零行列 O であること示せ。

問題 168

1. 対称行列 A, B の和 $A + B$ も対称行列になることを示しなさい。
2. 交代行列 C, D の和 $C + D$ も交代行列になることを示しなさい。
3. 交代行列 C の二乗 C^2 は、対称行列になることを示しなさい。

問題 169

1. n 次行列 B の (i, j) 成分を b_{ij} $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ とする。この時、次の行列の (i, j) 成分を求めよ。

$$1. \quad {}^t B, \quad 2. \quad B + {}^t B, \quad 3. \quad B - {}^t B.$$

2. n 次行列 B が与えられたとき $B + {}^t B$ は対称行列であることを示せ。また $B - {}^t B$ は交代行列であることを示せ。

問題 170 　正方行列 A は、対称行列と交代行列の和として一意的に表せることを示せ。

問題 171 　演習書の p.18 の 1 章の問題の 1.1 を解きなさい。

問題 172 　演習書の p.18 の 1 章の問題の 1.2 を解きなさい。

問題 173

1. 正方行列 A の左右から正則行列 P, Q をかけたところ $PAQ = E$ となったとする。(ただし、E は単位行列である。) A は正則行列であることを示し、A^{-1} を P, Q を用いて表わせ。
2. 正方行列 A に行および列に関する基本変形を何回か施したところ単位行列になったとする。このとき、A は正則行列であることを示せ。