代幾 I 演習 (2006/10/26)

[行列の冪と冪零[1]]

n 次正方行列 A に対して、A を k 回掛けた結果を A の k 回の**冪** *(***巾***)* と呼び A^k で表す。特に、任意の行列に対して $A^0 = E$ (E は単位行列) と定める[2]。

n 次正方行列 A に対して、ある自然数 $k > 0$ が存在して $A^k = O$(O は零行列) である時、この行列 A は、**冪（巾***)* **零行列**と呼ぶ[3]。また、冪零行列 A に対して、k より小さい数では、O にならないが、k で初めて、O になる時、この k を冪零行列 A の**次数**と呼ぶことにする。なお、O (零行列) の次数は 1 であり、逆に、次数が 1 の冪零行列は O のみである。

問題 174

行列 A, B が共に冪零行列で、その次数が、それぞれ k, j とし、$AB = BA$ を満す時、次の問に答えなさい。

1. 二つの行列の積 AB が冪零行列であることを示し、その次数の最大値[4]m を k, j で表しなさい。また、実際に、AB の次数が m になる例と、ならない[5]例をそれぞれ示しなさい。

2. 二つの行列の和 $A + B$ が冪零行列であることを示し、その次数の最大値 m を k, j で表しなさい。また、実際に、$A + B$ の次数が m になる例と、ならない例をそれぞれ示しなさい。

問題 175　次のような n 次の正方行列 $J_n = \{\delta_{i,i-1}\}$ が冪零行列であることを示し、その次数を求めなさい。

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

問題 176　行列 A が冪零行列ならば、$|A| = 0$ を示せ。

---

[1]「冪」、「冪零」は、それぞれ「べき」、「べきれい」と呼ぶ。
[2]$O^0 = E$ であることに注意。
[3]教科書 p.71 章末問題 6. を参照のこと。
[4]必ず、$(AB)^m = O$ となる様な m の内、最小の数を求める。次の問いも同様。
[5]m は、次数の最大値なので、m より小さい数で O になってしまう場合があり得る。

問題 177　A が冪零行列の時、e^A を次のように定義する[6]。

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n$$

この時、次の問に答えなさい。

1. $e^O = E$ であることを示しなさい。ただし、O, E はそれぞれ、零行列、単位行列とする。
2. 冪零行列 A, B が、$AB = BA$ を満すならば、e^A と e^B の積 $e^A e^B$ が $e^{(A+B)}$ になることを示しなさい。
3. e^A は正則であることを示しなさい。
4. 正則な行列 Q に対して、$e^{(Q^{-1}AQ)} = Q^{-1}(e^A)Q$ を示しなさい。

問題 178　演習書の p.19 の 1 章の問題の 1.9 を解きなさい。

問題 179　演習書の p.17 の類題 11 を解きなさい。

問題 180　演習書の p.73 の類題 2 を解きなさい。

問題 181　G を平面上の合同変換[7]全体の集合とする。この時、次の問いに答えなさい。

1. $T, S \in G$ (すなわち、T, S が合同変換) の時、T, S の合成 $T \cdot S$ (ここでは $T \cdot S(x) = T(S(x))$ と定義する) もまた、合同変換 (すなわち、$T \cdot S \in G$) であること示せ。
2. 任意の $T, S, U \in G$ に対し、$(T \cdot S) \cdot U = T \cdot (S \cdot U)$ を示せ。なお、この時、教科書 p.63 の定理 [7.1] を利用してよい。
3. 任意の $T \in G$ に対し、$(T \cdot E) = E \cdot T = T$ となる合同変換 E とは何か、言葉で説明しなさい。
4. 任意の $T \in G$ に対して、ある $S \in G$ が存在し、前問の E に対して、$T \cdot S = S \cdot T = E$ となることを示せ。
5. G は、合成 $(\cdot)$ に関して群になることを示せ。

問題 182　G を平面上の運動[8]全体の集合とする。この時、G は、変換の合成に関して群になることを示せ。

---

[6]形式的には無限和だが、A が冪零なので、実質は有限和であることに注意
[7]教科書 p.68 を参照
[8]教科書 p.69 参照

問題 183　G を平面上の回転[9]全体の集合とする。この時、G は、変換の合成に関して群になることを示せ。

問題 184　G を平面上のアフェイン変換[10]全体の集合とする。この時、G は、変換の合成に関して群になることを示せ。

問題 185　演習書の p.25 の類題 1 を解きなさい。

問題 186　演習書の p.27 の類題 3 を解きなさい。

問題 187　演習書の p.11 の類題 5 を解きなさい。

問題 188　次の行列が逆行列を持つための α の条件を定めよ。またその時の逆行列は何か。

1. $\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 2-\alpha & 3 \end{pmatrix}$　　2. $\begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ \alpha & 1 & \alpha \\ 0 & \alpha & 1 \end{pmatrix}$　　3. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & \alpha \\ 1 & \alpha & 0 \\ \alpha & 0 & 1 \end{pmatrix}$

問題 189　演習書の p.19 の 1 章の問題の 1.7 を解きなさい。

問題 190　演習書の p.66 の 4 章の問題の 4.1 を解きなさい。

問題 191　n の置換の個数が、$n!$ [11] であることを示せ。

問題 192　n の置換全体の集合は、置換の合成に関して、群[12]になることを示せ。

問題 193　偶置換全体の集合[13]は、置換の合成に関して、群になる[14] ことを示せ。

問題 194　n の置換 σ は次のような互換の積で、一意に表すことができることを示せ。ただし、$p_i > q_i,\ p_i > p_{i+1},\ k < n$ となる。

$$\sigma = (p_1, q_1)(p_2, q_2)..(p_k, q_k)$$

---

[9]教科書 p.69 参照

[10]教科書 p.70 参照

[11]$n!$ は n の階乗と呼び、$n! = n \times (n-1) \times .. \times 2 \times 1$ である。

[12]この群を「n 次の対称群」と呼び S_n で表します。

[13]偶置換全体は、置換全体の部分集合になっている。このように、ある群の部分集合が、同じ演算に関して、やはり群をなす場合に、この部分集合を「部分群」と呼ぶ。すなわち、偶置換全体の集合は、置換全体の集合の部分群である。

[14]この群を「n 次の交代群」と呼び A_n で表します。

[巡回置換]

6 の置換の内、例えば、

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

は、0 を 3 に、3 を 4 に、そして 4 を 0 に変換している。このように、n の置換の内 $k(\leq n)$ 個の要素を順番に入れ替えるような置換を、**巡回置換**と呼び、その入れ替える要素を並べて表す (上の例では、$(0,3,4)$ と表す)。また、入れ替える要素の個数を巡回置換の長さ (上の例では 3) と呼ぶ。互換は、循環置換の特別な場合 (すなわち $k=2$ の場合) と考えることができる。

この時、次の問に答えよ。

問題 195　長さ k 巡回置換 $(a_1, a_2, .., a_k)$ の逆置換が、再び、長さ k の逆置換になることを示しなさい。また、この時、その逆置換は、どのような形になるか ?

問題 196　長さ k の巡回置換の一つを σ とする。この時、置換の集合 $\{\sigma, \sigma^2(=\sigma\sigma), \sigma^3, .., \sigma^k\}$ が群になることを示しなさい。

問題 197　長さ k 巡回置換 $(a_1, a_2, .., a_k)$ が、次のような $k+1$ 個の互換の積で表現できることを示しなさい。

$$(a_1, a_2, .., a_k) = (a_1, a_k)(a_1, a_2)(a_2, a_3)..(a_{k-1}, a_k)(a_1, a_k)$$

問題 198　任意の置換は、巡回置換の積で表現できることを示せ。

問題 199　行列式の定義に従って 4 次の行列式を求めなさい。

問題 200　演習書の p.19 の 1 章の問題の 1.11 を解きなさい。

問題 201　演習書の p.19 の 1 章の問題の 1.12 を解きなさい。

問題 202

1. A が直交行列ならば $\det A = \pm 1$ であることを示せ。
2. A がエルミート行列ならば $\det A$ は実数であることを示せ。
3. A がユニタリ行列ならば $\det A$ は絶対値が 1 の複素数であることを示せ。

問題 203　$\det {}^tA = A$ と $\det \overline{A} = \overline{\det A}$ を用いて $\det A^* = \overline{\det A}$ を証明せよ。

問題 204　正則行列は基本行列の積で表すことができることと，$|AB| = |A||B|$ を用いて正則行列の行列式は 0 ではないことを示せ。

問題 205　演習書の p.19 の 1 章の問題の 1.13 を解きなさい。

問題 206　演習書の p.19 の 1 章の問題の 1.14 を解きなさい。

問題 207　演習書の p.30 の 類題 6 を解きなさい。