代幾 I 演習 (2006/11/30)

問題 234　行列 A がエルミート行列[1] の時、$E+iA, E-iA$ が何れも正則行列であることを示せ。

問題 235　演習書の p.105 の 類題 2 を解きなさい。

問題 236　演習書の次の問題を解きなさい。

1. p.10 の類題 10 の 1.
2. p.10 の類題 10 の 2. の (1)
3. p.10 の類題 10 の 2. の (2)

問題 237

1. 行列 X が実対称行列、Y が実交代行列の時、$A = X + iY$ で表される複素行列 A は、エルミート行列であることを示せ。
2. 逆に、複素行列 A が、エルミート行列であれば、ある実対称行列 X と実交代行列 Y が存在し、$A = X + iY$ と一意に表すことができることを示せ。

問題 238　演習書の p.35 の 2 章の問題の 2.5 を解きなさい。

問題 239　演習書の p.35 の 2 章の問題の 2.6 を解きなさい。

問題 240

1. 行列 A がエルミート行列の時、$U = (E-iA)(E+iA)^{-1}$ で定義される行列 U は、ユニタリー行列[2] で、かつ $|E+U| \neq 0$ であることを示せ。
2. 行列 U が $|E+U| \neq 0$ を満す、ユニタリー行列の時、$A = i(U+E)^{-1}(U-E)$ で定義される行列 A がエルミート行列であることを示せ。

問題 241　演習書の p.35 の 2 章の問題の 2.7 を解きなさい。

問題 242　演習書の p.61 の 類題 2 を解きなさい。

---

[1]行列 A がエルミート行列であることの定義は、行列 A が $A = A^*$ を満すことを言う。ただし、$A^* = \overline{{}^tA}$ である。

[2]行列 A がユニタリー行列であることの定義は、行列 A が $A^* = A^{-1}$ を満すことを言う。

問題 243　行列 A, B が共にエルミート行列ならば、次の行列もまた、エルミート行列になるということを示せ。

1. $A+B$,　2. $AB+BA$,　3. $i(AB-BA)$

問題 244　演習書の p.62 の 類題 3 を解きなさい。

問題 245　演習書の p.63 の 類題 4 を解きなさい。

問題 246　$A_1, A_2, .., A_n$ がエルミート行列の時、$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} A_i^2 = O$ ならば、実は、$A_i = O (i = 1, 2, .., n)$ であることを示せ。

問題 247　演習書の p.64 の 類題 5 を解きなさい。

問題 248　演習書の p.66 の 4 章の問題の 4.2 を解きなさい。

問題 249　A がエルミート行列ならば、$|A|$ は実数であることを示せ。

問題 250　演習書の p.66 の 4 章の問題の 4.3 を解きなさい。

問題 251　演習書の p.66 の 4 章の問題の 4.4 を解きなさい。

問題 252　A がエルミート行列, B が正則行列ならば、B^*AB もエルミート行列になることを示せ。

問題 253　演習書の p.66 の 4 章の問題の 4.5 を解きなさい。

問題 254　演習書の p.67 の 4 章の問題の 4.6 を解きなさい。

問題 255　次の行列の Rank (階数) を求めなさい。

$$1.\quad \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix},\quad 2.\quad \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ y & 1 & x \\ x & y & 1 \end{pmatrix},\quad 3.\quad \begin{pmatrix} 0 & x & 0 & 0 & 0 \\ y & 0 & y & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & y & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 & x & 0 \end{pmatrix},\quad 4.\quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & x & 1 & 0 \\ 1 & x & 1 & 0 & 1 \\ x & 1 & 0 & 1 & x \\ 1 & 0 & 1 & x & 1 \\ 0 & 1 & x & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

問題 256　演習書の p.67 の 4 章の問題の 4.7 を解きなさい。

問題 257　演習書の p.67 の 4 章の問題の 4.9 を解きなさい。