

代幾 I 演習 (2006/12/07)

問題 258 行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}$$

について、次の問いに答えなさい。

1. 四つの変数 x, a, b, c に関するヴァン=デルモント行列式¹

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & a & b & c \\ x^2 & a^2 & b^2 & c^2 \\ x^3 & a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = \Delta(x, a, b, c)$$

が、三つの変数 a, b, c に関する差積 $\Delta(a, b, c)$ と、 x に関する三次の多項式 $f(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ を用いて、 $\Delta(x, a, b, c) = \Delta(a, b, c)f(x)$ と表現できることを示せ。また、この時、係数 α, β, γ を変数 a, b, c を用いて表せ。

2. 同じく、前問の行列式の 1 列目に関する行列式の展開²を求めよ
3. 前の二つの問題の結果を用いて、冒頭の行列式の値を、三つの変数 a, b, c の式と差積 $\Delta(a, b, c)$ の積の形で表したものを求めよ。
4. 同様にして行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}$$

の値を求めよ。

問題 259 自然数 n, m は、 $n > m$ を満すとし、 A を (n, m) 行列、 B を (m, n) 行列とする。この時、二つの行列の積 AB (これは、 n 次の正方行列になることに注意) の行列式 $|AB|$ は常に 0 になることを示せ。(ヒント: A に、全ての要素が 0 の行を下に $(n - m)$ 行追加した行列 A' と、 B に、全ての要素が 0 の列を右に $(n - m)$ 列追加した行列 B' の、共に n 次の行列を作り、その積 $A'B'$ を計算すると..)

問題 260 演習書の p.83 の 5 章の問題 5.1 を解きなさい。

¹Text p.82 参照。

²Text p.85 参照

問題 261 演習書の p.83 の 5 章の問題 5.2 を解きなさい。

問題 262 次の行列 A について以下の問い答えなさい。

$$A = \begin{pmatrix} 3 & a+b+c & a^2+b^2+c^2 \\ a+b+c & a^2+b^2+c^2 & a^3+b^3+c^3 \\ a^2+b^2+c^2 & a^3+b^3+c^3 & a^4+b^4+c^4 \end{pmatrix}$$

について、次の問いに答えなさい。

1. B を次のような行列とする時、 $A = B({}^tB)$ であることを示せ。

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^3 \end{pmatrix}$$

2. 行列式 $|A|$ の値を、三つの変数 a, b, c の差積 $\Delta(a, b, c)$ を用いて表せ。

問題 263

共に零ベクトルではない、二つの三次元ベクトル a, b を取り、その二つのベクトルの外積 $a \times b$ を c とする時、次の問いに答えなさい。

1. $\det(a, b, c) = |c|^2$ を示せ。

2. もし、 a と b が直交するならば、 a, b, c をそれぞれ自分自身の長さで割ったベクトルを要素とする行列 $A = \left(\frac{a}{|a|}, \frac{b}{|b|}, \frac{c}{|c|} \right)$ は直交行列であることを示せ。

問題 264 演習書の p.83 の 5 章の問題 5.3 を解きなさい。

問題 265 演習書の p.84 の 5 章の問題 5.4 を解きなさい。

問題 266 次の行列式を因数分解しなさい。

1.

$$\begin{vmatrix} (b+c)^2 & c^2 & b^2 \\ c^2 & (c+a)^2 & a^2 \\ b^2 & a^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix}$$

2.

$$\begin{vmatrix} 1+a & a & a \\ b & 1+b & b \\ c & c & 1+c \end{vmatrix}$$

問題 267 演習書の p.85 の 5 章の問題 5.9 を解きなさい。

問題 268 演習書の p.85 の 5 章の問題 5.10 を解きなさい。