

代幾 I 演習 (2006/12/14)

問題 269 n 次の正方行列 A が確率行列¹ で、 n 次の縦ベクトル \vec{p} が確率ベクトル² の時、 $A\vec{p}$ もまた、確率ベクトルになること示せ。

問題 270 演習書の p.81 の 5 章の類題 8 を解きなさい。

問題 271 演習書の p.81 の 5 章の類題 9 を解きなさい。

問題 272

8 つの部屋 (1 から 8 の数字が振られている) があり、その何れかの部屋に人がいるとする (下の例では、現在 5 番目の部屋に人がいる)。

1	2	3	4	5	6	7	8

一日に一度、コイン³を投げ、表が出れば左の部屋へ、裏が出れば右の部屋に移るとする。ただし、移動先がない場合⁴は、その部屋に留まるとする。

この時、次の問いに答えなさい。

1. 本日、 i 番目の部屋にいる確率を $\vec{p} = (p_i)$ 、次の日に i 番目の部屋にいる確率を $\vec{q} = (q_i)$ とした時 $\vec{q} = A\vec{p}$ となるような行列 A を求めなさい。
2. 初日は、1 番目の部屋にいた (即ち $\vec{p}_1 = (p_{1i})$ の時、 $p_{11} = 1, p_{1i} = 0 (i = 2, \dots, 8)$ となる) とすると、4 日目 (即ち、3 度コインを投げる) に、再び、部屋 1 に居る確率を求めなさい。
3. A^n を求めなさい。
4. \vec{p}_0 を確率ベクトルとし、確率ベクトルの列 $\{\vec{p}_n\}$ を、 $\vec{p}_{n+1} = A\vec{p}_n$ で定義すると、最初の確率ベクトル \vec{p}_0 に拘らず、このベクトル列が収束することを示しなさい。

問題 273 演習書の p.84 の 5 章の問題 5.5 を解きなさい。

¹行列 $A = (a_{ij})$ が確率行列であることの定義は、その成分が非負で、しかも、その全ての行において、成分の和が 1 になること、即ち $a_{ij} \geq 0, \sum_{j=1}^n a_{ij} = 1 (i = 1..n)$ であることを言う。(cf. 教科書 p.73)

² $\vec{p} = (p_i)$ が確率ベクトルであることの定義は、その成分が、全て非負で、かつ、その和が 1 となることである。即ち、 $p_i \geq 0, \sum_{i=1}^n p_i = 1$ の場合を言う。

³このコインは、歪んでおらず、投げると正確に $\frac{1}{2}$ の確率で表があるいは裏のどちらかが出るとする。

⁴1 番目の部屋で表が出た場合と、8 番目の部屋で裏が出た場合

問題 274 演習書の p.84 の 5 章の問題 5.6 を解きなさい。

問題 275 A 君, B 君, C 君, D 君, E 君の 5 人は、それぞれ自分のホームページを作成し、互いに見せあって、自慢することにした。そして、もし、自分以外の人ホームページを見て、これは面白いと思ったならば、自分のページにその面白いと思ったページへのリンクを作成することにした。

暫くして、各自のホームページも作成され、内容の評価が済み、その結果として、次のようなリンクが行われた (A 君は E 君以外の三人のページにリンクをはったが A 君のページにリンクをしたのは E 君だけだった)。

リンク元 \ リンク先	A	B	C	D	E
A					
B					
C					
D					
E					

その後、5 人は、誰のページが一番良いかを議論することになった。その結果、次のような結論⁵ になった。

- もし、そのページが価値があるならば、他の人からリンクされているに違いない (リンクされているページは評価が高い)。
- そのリンクの価値は、リンク元の価値に比例するに違いない (価値のあるページからリンクされるページは評価が高い)。
- そのリンクは価値は、リンク元のリンク量に反比例するに違いない (できるだけ価値のあるページだけをリンクする)。

この結論を、5 人のホームページの評価を $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ ととして、関係式で表現すると次のようになった。

$$\begin{cases} x_1 = & & & & \frac{1}{1}x_5 \\ x_2 = & \frac{1}{3}x_1 & & +\frac{1}{2}x_3 & \\ x_3 = & \frac{1}{3}x_1 & +\frac{1}{2}x_2 & & +\frac{1}{2}x_4 \\ x_4 = & \frac{1}{3}x_1 & & & \\ x_5 = & & \frac{1}{2}x_2 & +\frac{1}{2}x_3 & +\frac{1}{2}x_4 \end{cases}$$

この時、次の問いに答えなさい。

⁵cf. Google の人気の秘密 (http://www.google.co.jp/intl/ja/why_use.html)

1. 縦ベクトル $\vec{x} = (x_i)$ を考え、上記の関係式を行列とベクトルを用いて表すと、 $\vec{x} = A\vec{x}$ となる。このような行列 A を求めなさい。
2. A^n を求めなさい。
3. $x_0 = {}^t(1, 0, 0, 0, 0)$ とし、 $x_{n+1} = Ax_n$ とすると、 $x_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ が収束することを示しなさい。
4. x_∞ は、 $x_\infty = Ax_\infty$ を満たすことを示しなさい。
5. この評価法で、A 君から E 君の内、一番評価が高いのは誰のページか。

問題 276 演習書の p.84 の 5 章の問題 5.7 を解きなさい。

問題 277 演習書の p.85 の 5 章の問題 5.8 を解きなさい。

問題 278 (m, n) 型の行列 A, B に対して、 $PAQ = B$ を満たす、正則な行列 P, Q (ただし、 P は、 n 次の正方行列で、 Q は、 m 次の正方行列となる) が存在する時に、 $A \sim B$ で表し、 A と B は、同値であると呼ぶことにする。この時、次の三つが成立することを示せ。

1. $A \sim A$
2. $A \sim B \Rightarrow B \sim A$
3. $A \sim B, B \sim C \Rightarrow A \sim C$

問題 279 演習書の p.85 の 5 章の問題 5.11 を解きなさい。

問題 280 演習書の p.85 の 5 章の問題 5.12 を解きなさい。

問題 281 $\text{rank}(A) = \text{rank}(B) \Leftrightarrow A \sim B$ を示せ。

問題 282 演習書の p.86 の 5 章の問題 5.15 を解きなさい。

問題 283 演習書の p.86 の 5 章の問題 5.16 を解きなさい。

問題 284 二つの多項式 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, g(x) = px^2 + qx + r$ に対して、次の行列式 $R(f, g)$ をこの二つの多項式の終結式と呼ぶ。

$$R(f, g) = \begin{vmatrix} a & b & c & d & 0 \\ 0 & a & b & c & d \\ p & q & r & 0 & 0 \\ 0 & p & q & r & 0 \\ 0 & 0 & p & q & r \end{vmatrix}$$

この時、「二つの方程式 $f(x) = 0$ と $g(x) = 0$ が同じ根を持つこと」と、「 $R(f, g) = 0$ が成立すること」が必要十分条件になっていることを示せ。

問題 285 演習書の p.67 の 4 章の問題 4.8 を解きなさい。

問題 286

1. A, B が n 次正方行列の時、次の式が成立することを示せ。

$$\begin{vmatrix} A+B & A-B \\ A-B & A+B \end{vmatrix} = 4^n |A| |B|$$

2. 次の行列式を求めよ。

$$\begin{vmatrix} a+b+c+d & a+b-c-d & a-b+c-d & a-b-c+d \\ a+b-c-d & a+b+c+d & a-b-c+d & a-b+c-d \\ a-b+c-d & a-b-c+d & a+b+c+d & a+b-c-d \\ a-b-c+d & a-b+c-d & a+b-c-d & a+b+c+d \end{vmatrix}$$

問題 287 $f(x) = a \cos x + b \sin x$ という形をした関数全体の集合を $F (= \{a \cos x + b \sin x | a, b \in R\})$, 二次元の実ベクトルの集合を $V (= \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} | a, b \in R \right\})$ で、それぞれ表すとする。この時に次の問いに答えなさい。

1. $f(x) \in F$ ならば、 f を微分した $f'(x) = \frac{d}{dx} f(x)$ も F の要素であることを示せ。
2. 上記の F 上の変換 $D(f) = f'$ は、全単射であることを示せ。
3. $f(x) = a \cos x + b \sin x \in F$ に対して、二次元ベクトル $v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in V$ を対応させる写像 $v = \varphi(f)$ を考える。すると、この写像 $\varphi(f)$ は、全単射であることを示せ。
4. V 上の変換 $\bar{D}(v) = \varphi(D(\varphi^{-1}(v)))$ が全単射であることを示せ。
5. 上記の変換 \bar{D} には、ある 2×2 の実行列 A_D があり、 $\bar{D}(v) = A_D v$ と表現できることを示せ。
6. 変換 D の逆変換を S とすると、上記と同様に定義される $\bar{S} = \varphi(S(\varphi^{-1}(v)))$ も、ある行列 A_S があり、 $\bar{S}(v) = A_S v$ となることを示せ。
7. A_S は、 A_D 逆行列であることを示せ。
8. 上記の性質を利用して、 F 上の微分方程式 $f'(x) = \cos x + \sin x$ の解の内、 F に含まれるものを求めよ。
9. 同様にして F 上の微分方程式 $f''(x) + 2f'(x) = \cos x$ の解の内 F に含まれるものを求めよ。