代幾 I 小テスト [問題] (2006/05/25)

[注意]

- テスト形式ですので「相談は不可」です。私語は慎むように !!。質問がある場合は、黙って、手を上げて、監督者が来るのを待ってください。
- 持ち込みは「なんでも可」です。ただし、トラブルをさけるために、「貸し借り」は不可とします。
- 試験時間は 60 分です。試験終了後、解答を配布しますので、それをみて、「自分で採点」の上、その結果を (当然、名前と学籍番号を記入した上で..) 提出してください。

問題 1 $\alpha = -4-2i, \quad \beta = -5+3i$ とする時、次の計算を行いなさい。

1. $\alpha+\beta$ 2. $\alpha-\beta$ 3. $\alpha\times\beta$ 4. $\dfrac{\alpha}{\beta}$ 5. $\mathrm{Re}(\beta)$ 6. $\mathrm{I}m(\beta)$ 7. $\overline{\beta}$ 8. $|\beta|$

問題 2 次の方程式の根 (解) 求めよ。ただし、全ての根は、整数である。

1. $700+100x-203x^2-29x^3+7x^4+x^5=0$
2. $-320-176x-12x^2+7x^3+x^4=0$
3. $-24-10x+23x^2+10x^3+x^4=0$

問題 3 次の複素数を極形式にしなさい。

1. $\dfrac{9\sqrt{2}}{4}+\dfrac{3\sqrt{6}}{4}i$ 2. $-\sqrt{6}-\sqrt{6}i$ 3. $-1+i$

問題 4 α, β を複素数とすると、次の式は実数になることを示せ。

1. $\alpha+\overline{\alpha}$
2. $\alpha\overline{\beta}+\overline{\alpha}\beta$
3. $(\alpha+\beta)(\overline{\alpha}+\overline{\beta})$

問題 5 多項式 $f(x)$ を $x-a, x-b$ $(a \neq b)$ で割った余りをそれぞれ r, s とするとき $f(x)$ を $(x-a)(x-b)$ で割った余りを求めよ。

問題 6 $\left(\dfrac{1+\sqrt{7}i}{2}\right)^n+\left(\dfrac{1-\sqrt{7}i}{2}\right)^n$ は実数であることを示せ。

代幾 I 小テスト [解答] (2006/05/25)

問題 1 　$\alpha = -4-2i, \quad \beta = -5+3i$ とする時、次の計算を行いなさい。

1. $\alpha+\beta = -9+i$ 　2. $\alpha-\beta = 1-5i$ 　3. $\alpha\times\beta = 26-2i$ 　4. $\dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{7}{17}+\dfrac{11}{17}i$
5. $\mathrm{R}e(\beta) = -5$ 　6. $\mathrm{I}m(\beta) = 3$ 　7. $\overline{\beta} = -5-3i$ 　8. $|\beta| = \sqrt{34}$

問題 2 　次の方程式の根 (解) 求めよ。ただし、全ての根は、整数である。

1. **Q.** $700+100x-203x^2-29x^3+7x^4+x^5=0$

   A. $x = -7, \quad -5, \quad -2, \quad 2, \quad 5$

2. **Q.** $-320-176x-12x^2+7x^3+x^4=0$

   A. $x = -4(3$ 重根$), 5$

3. **Q.** $-24-10x+23x^2+10x^3+x^4=0$

   A. $x = -6, \quad -4, \quad -1, \quad 1$

問題 3 　次の複素数を極形式にしなさい。

1. $\dfrac{9\sqrt{2}}{4}+\dfrac{3\sqrt{6}}{4}i = \dfrac{3\sqrt{6}}{2}(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6})$ 　2. $-\sqrt{6}-\sqrt{6}i = 2\sqrt{3}(\cos\frac{5}{4}\pi+i\sin\frac{5}{4}\pi)$
3. $-1+i = \sqrt{2}(\cos\frac{3}{4}\pi+i\sin\frac{3}{4}\pi)$

問題 4 　α, β を複素数とすると、次の式は実数になることを示せ。

1. **Q.** $\alpha+\overline{\alpha}$

   A. $\alpha = a+bi\,(a, b \in \boldsymbol{R})$ とすると、

$$\begin{aligned}
\text{与式} &= (a+bi)+\overline{(a+bi)} \\
&= (a+bi)+(a-bi) \\
&= (a+a)+(b-b)i \\
&= 2a
\end{aligned}$$

即ち、

$$\text{与式} = 2a$$

処が、

$$a \in \boldsymbol{R} \quad \text{より} \quad 2a \in \boldsymbol{R}$$

従って、

$$\text{与式} \in \boldsymbol{R}$$

2. **Q.** $\alpha\overline{\beta}+\overline{\alpha}\beta$

   A. 今、$\gamma=\alpha\overline{\beta}$ と置くとすると、

$$\begin{aligned}\overline{\gamma} &= \overline{(\alpha\overline{\beta})}\\ &= \overline{\alpha}\overline{\overline{\beta}}\\ &= \overline{\alpha}\beta\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}\text{与式} &= \alpha\overline{\beta}+\overline{\alpha}\beta\\ &= \gamma+\overline{\gamma}\end{aligned}$$

これは前問より、実数。

3. **Q.** $(\alpha+\beta)(\overline{\alpha}+\overline{\beta})$

   A. まず、任意の複素数 $\gamma=a+bi\,(a,b\in\boldsymbol{R})$ に対して、$\gamma\overline{\gamma}\in\boldsymbol{R}$ を示す。

$$\begin{aligned}\gamma\overline{\gamma} &= (a+bi)\overline{(a+bi)}\\ &= (a+bi)(a-bi)\\ &= a^2+b^2\end{aligned}$$

ここで、

$$a,b\in\boldsymbol{R}$$

より、

$$a^2+b^2\in R$$

次に、$\gamma=\alpha+\beta$ と置くと、

$$\begin{aligned}\overline{\gamma} &= \overline{(\alpha+\beta)}\\ &= \overline{\alpha}+\overline{\beta}\end{aligned}$$

よって、

$$\begin{aligned}\text{与式} &= (\alpha+\beta)(\overline{\alpha}+\overline{\beta})\\ &= \gamma\overline{\gamma}\end{aligned}$$

従って、

$$\text{与式}\in\boldsymbol{R}$$

問題 5

Q. 多項式 $f(x)$ を $x-a,\ x-b\ (a\neq b)$ で割った余りをそれぞれ r,s とするとき $f(x)$ を $(x-a)(x-b)$ で割った余りを求めよ。

A. $f(x)$ を $(x-a)(x-b)$ で割った、余りをと商を、それぞれ $R(x), Q(x)$ とする。この、$R(x), Q(x)$ を利用すると $f(x) = Q(x)(x-a)(x-b) + R(x)$ と表すことができる。これに、剰余定理を用いると、次の等式が成立する。

$$\begin{cases} r = f(a) = Q(x)(a-a)(a-b) + R(a) = R(a) \\ s = f(b) = Q(x)(b-a)(b-b) + R(b) = R(b) \end{cases}$$

ここで、割る式 $(x-a)(x-b)$ は二次式なので、余り は 0 か、次数が 1 以下の多項式である。いずれの場合も、一般に、$R(x) = px + q$ (ただし、余りが 0 の時には $p = q = 0$ の時、逆に、p また q のどちらかが 0 でなければ、これは次数が 1 以下の多項式となる) と置くことができる。

これを利用すると、上記の関係式から

$$\begin{cases} R(a) = pa + q = r \\ R(b) = pb + q = s \end{cases}$$

この連立方程式を p, q について解くと、

$$\begin{cases} p = \dfrac{r-s}{a-b} \\ \\ q = \dfrac{as-br}{a-b} \end{cases}$$

よって、求める余り $R(x)$ は $\dfrac{r-s}{a-b}x + \dfrac{as-br}{a-b}$ である。

問題 6

Q. $\left(\dfrac{1+\sqrt{7}i}{2}\right)^n + \left(\dfrac{1-\sqrt{7}i}{2}\right)^n$ は実数であることを示せ。

A. $z = \dfrac{1+\sqrt{7}i}{2}$ とすると、$\dfrac{1-\sqrt{7}i}{2}$ は、z の共役複素数である $\overline{z}$ である。一方、この z を極形式に変換した結果を $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ と置けば、その共役は、$r(\cos\theta - i\sin\theta)$ となる。

したがって、

$$
\begin{aligned}
\text{与式} &= z^n + \overline{z}^n \\
&= (r(\cos\theta + i\sin\theta))^n + (r(\cos\theta - i\sin\theta))^n \\
&= r^n((\cos\theta + i\sin\theta)^n + (\cos\theta - i\sin\theta)^n)
\end{aligned}
$$

ここで、ドモアブルの定理より、

$$
\begin{aligned}
&= r^n((\cos n\theta + i\sin n\theta) + (\cos n\theta - i\sin n\theta)) \\
&= r^n(2\cos n\theta)
\end{aligned}
$$

よって、

$$\text{与式} \in \boldsymbol{R}$$

[別解] 与式の共役を取ると..

$$
\begin{aligned}
\overline{\text{与式}} &= \overline{z^n + \overline{z}^n} \\
&= \overline{z^n} + \overline{(\overline{z}^n)} \\
&= \overline{z}^n + (\overline{\overline{z}})^n \\
&= \overline{z}^n + z^n \\
&= z^n + \overline{z}^n \\
&= \text{与式}
\end{aligned}
$$

即ち、与式とその共役複素数は同じである。このような複素数は、実数のみである。