代幾 I 小テスト [問題] (2006/07/06)

[注意]

- テスト形式ですので「相談は不可」です。私語は慎むように !!。質問がある場合は、黙って、手を上げて、監督者が来るのを待ってください。
- 持ち込みは「なんでも可」です。ただし、トラブルをさけるために、「貸し借り」は不可とします。
- 試験時間は 60 分です。試験終了後、解答を配布しますので、それをみて、「自分で採点」の上、その結果を (当然、名前と学籍番号を記入した上で..) 提出してください。

問題 1　次の行列式を計算しなさい。

$$1.\ \begin{vmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \end{vmatrix}, \quad 2.\ \begin{vmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \end{vmatrix}, \quad 3.\ \begin{vmatrix} 0 & -2 & 3 \\ -3 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

問題 2　次の二つの多項式の最大公約数を求めなさい。

1. $x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 7x + 6, \quad x^3 + 2x^2 + 2x + 4$
2. $x^3 - x^2, \quad x^2 - 2x + 1$
3. $x^6 - 4x^5 + x^4 + 15x^3 - 14x^2 - 13x + 10, \quad x^5 - 3x^4 - 3x^3 + 13x^2 + 5x - 7$

問題 3　次の二点を通る直線の式を求めなさい。

1. $(-3, 2), (2, 0)$,　2. $(7, 3), (3, 3)$,　3. $(0, -4), (-2, -6)$

問題 4　複素数 $z = x + yi \quad (y \neq 0)$ に対して、zz' も $z + z'$ も共に実数になるならば、実は、z' は、z の共役複素数 $\bar{z}$ であることを示せ。

問題 5　実数係数の二次方程式 $x^2 + px + q = 0 \quad (p, q \in \boldsymbol{R})$ が複素数解 $a + bi \quad (a, b \in \boldsymbol{R}, \quad b \neq 0)$ を持つならば、もう一つの解は、$a - bi$ であることを証明せよ。

問題 6　$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ とする。

1. $\boldsymbol{K}^3$ の単位ベクトル $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ をそれぞれ $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ の線型結合で表せ。
2. 上の問の結果を利用して，次のベクトルを $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ の線型結合で表せ。

   (a) $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$,　(b) $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$,　(c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

代幾 I 小テスト [解答] (2006/07/06)

問題 1　次の行列式を計算しなさい。

1.

Q. $\begin{vmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \end{vmatrix}$

A.

$$\begin{aligned} &= \begin{vmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \end{vmatrix} \\ &= 5 \end{aligned}$$

,　2.

Q. $\begin{vmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \end{vmatrix}$

A.

$$\begin{aligned} &= \begin{vmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \end{vmatrix} \\ &= -1 \end{aligned}$$

,　3.

Q. $\begin{vmatrix} 0 & -2 & 3 \\ -3 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}$

A.

$$\begin{aligned} &= \begin{vmatrix} 0 & -2 & 3 \\ -3 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} \\ &= -13 \end{aligned}$$

問題 2　次の二つの多項式の最大公約数を求めなさい。

1. **Q.** $x^4+3x^3+4x^2+7x+6, \quad x^3+2x^2+2x+4$

   A.

[問題] $x^4+3x^3+4x^2+7x+6, \quad x^3+2x^2+2x+4$

[計算] $$\begin{array}{lcllcl} x^4+3x^3+4x^2+7x+6 &=& (x^3+2x^2+2x+4)(x+1) &+& (x+2) \\ x^3+2x^2+2x+4 &=& (x+2)(x^2+2) &+& 0 \end{array}$$

[解答] $x+2$

2. **Q.** $x^3-x^2, \quad x^2-2x+1$

   A.

[問題] $x^3-x^2, \quad x^2-2x+1$

[計算] $$\begin{array}{lcllcl} x^3-x^2 &=& (x^2-2x+1)(x+1) &+& (x-1) \\ x^2-2x+1 &=& (x-1)(x-1) &+& 0 \end{array}$$

[解答] $x-1$

3. **Q.** $x^6-4x^5+x^4+15x^3-14x^2-13x+10, \quad x^5-3x^4-3x^3+13x^2+5x-7$

   A.

[問題] $x^6-4x^5+x^4+15x^3-14x^2-13x+10, \quad x^5-3x^4-3x^3+13x^2+5x-7$

[計算] $$\begin{array}{lcl} x^6-4x^5+x^4+15x^3-14x^2-13x+10 &=& (x^5-3x^4-3x^3+13x^2+5x-7)(x-1) \\ &+& (x^4-x^3-6x^2-x+3) \\ x^5-3x^4-3x^3+13x^2+5x-7 &=& (x^4-x^3-6x^2-x+3)(x-2) \\ &+& (x^3+2x^2-1) \\ x^4-x^3-6x^2-x+3 &=& (x^3+2x^2-1)(x-3) \\ &+& 0 \end{array}$$

[解答] x^3+2x^2-1

問題 3　次の二点を通る直線の式を求めなさい。

1.

Q. $(-3,2),(2,0)$

A. $2x+5y=4$

, 2.

Q. $(7,3),(3,3)$

A. $y=3$

, 3.

Q. $(0,-4),(-2,-6)$

A. $x-y=4$

問題 4

Q. 複素数 $z=x+yi \quad (y\neq 0)$ に対して、zz' も $z+z'$ も共に実数になるならば、実は、z' は、z の共役複素数 $\overline{z}$ であることを示せ。

A. $z'=x'+y'i$ と置く。仮定より、$z+z'=(x+yi)+(x'+y'i)=(x+x')+(y+y')i\in \boldsymbol{R}$ なので、$y+y'=0$ が言える。これから $y'=-y$。同様にして $zz'=(x+yi)(x'+y'i)=(x+yi)(x'-yi)=(xx'-yy)+y(x'-x)i\in \boldsymbol{R}$ より、$y(x'-x)=0$ が言える。ここで、$y\neq 0$ より $x'-x=0$ 。よって $x'=x$。以上により、$y'=-y, x'=x$ が解ったので $z'=x-yi=\overline{z}$ 。すなわち、題意を満すような複素数 z' は、z の共役複素数 $\overline{z}$ である。

問題 5

Q. 実数係数の二次方程式 $x^2+px+q=0 \quad (p,q\in \boldsymbol{R})$ が複素数解 $a+bi \quad (a,b\in \boldsymbol{R}, \quad b\neq 0)$ を持つならば、もう一つの解は、$a-bi$ であることを証明せよ。

A. $a+bi$ が、$x^2+px+q=0$ 根なので、x に $a+bi$ を代入した時に等式が成立しなければならない。

従って、$(a+bi)^2+p(a+bi)+q=(a^2-b^2+pa+q)+(2ab+pb)i=0$ 即ち、$(a^2-b^2+pa+q)=(2ab+pb)=0$ である。

次に、同様にして、x に $a+bi$ を代入すると、$(a-bi)^2+p(a-bi)+q=(a^2-b^2pa+q)-(2ab+pb)i$ となる。

ところが、前述の通り、$(a^2-b^2pa+q)=(2ab+pb)=0$ なので、これは 0 。すなわち、$a-bi$ を代入すると、方程式の等式が成立するので、これはこの方程式の解となる。

[**別解**] 二次方程式 $x^2+px+q=0 \quad (p,q\in \boldsymbol{R})$ の異る二つの根を $\alpha(=a+bi),\beta$ とすると、根と係数の関係より、$\alpha+\beta=-p\in \boldsymbol{R}, \alpha\beta=q\in \boldsymbol{R}$ である。

ところが、α が実数でない $(b\neq 0)$ ので、このような性質を満す複素数 β は、α の共役複素数でなければならない。

すなわち、$\beta=\overline{\alpha}=\overline{a+bi}=a-bi$。つまり、与えられた方程式を満す、もう一つの根は、$a-bi$ である。

問題 6 $\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{c}=\begin{pmatrix}-3\\2\\1\end{pmatrix}$ とする。

1. **Q.** $\boldsymbol{K}^3$ の単位ベクトル $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ をそれぞれ $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ の線型結合で表せ。

   A.

   $$\boldsymbol{e}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=a\boldsymbol{a}+b\boldsymbol{b}+c\boldsymbol{c}=a\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}-3\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+2b-3c\\b+2c\\c\end{pmatrix}$$

   として、両辺の x,y,z 成分を比較することによって、連立方程式

   $$\begin{cases}a+2b-3c=1\\ \quad\quad b+2c=0\\ \quad\quad\quad\quad c=0\end{cases}$$

   が成立する。これを解いて、

   $$\begin{cases}a=1\\b=0\\c=0\end{cases}$$

   即ち、

   $$\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{a}$$

   同様にして、

   $$\boldsymbol{e}_2=-2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$$

   $$\boldsymbol{e}_3=7\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$$

   である。

2. **Q.** 上の問の結果を利用して，次のベクトルを $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ の線型結合で表せ。

   (a) $\begin{pmatrix}2\\-1\\-3\end{pmatrix}$, (b) $\begin{pmatrix}0\\3\\2\end{pmatrix}$, (c) $\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}$

   A. (a)

   $$\begin{aligned}\begin{pmatrix}2\\-1\\-3\end{pmatrix}&=2\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2-3\boldsymbol{e}_3\\&=2(\boldsymbol{a})-(-2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})-3(7\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\\&=-17\boldsymbol{a}+5\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{c}\end{aligned}$$

同様にして、

(b)

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 8\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} + 2\boldsymbol{c}$$

(c)

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = -13\boldsymbol{a} + 4\boldsymbol{b} - 2\boldsymbol{c}$$