代幾 I 小テスト [問題] (2006/10/12)

問題 1　次の行列の rank をもとめなさい。

Q.1

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -8 & 5 \\ -1 & 1 & 6 & -2 \\ 0 & 2 & 5 & -5 \\ 0 & -1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

Q.2

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 0 & -1 & 1 \\ -4 & 5 & 1 & -4 & 4 \\ 4 & -5 & -1 & 4 & -4 \\ 5 & -6 & -2 & 5 & -5 \end{pmatrix}$$

Q.3

$$\begin{pmatrix} 2 & 8 & -8 & 6 \\ 0 & -7 & 4 & -3 \\ -1 & -4 & 4 & -3 \\ -1 & -4 & 4 & -3 \end{pmatrix}$$

問題 2　次の行列の逆行列をもとめなさい。

Q.1

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & -1 \\ -2 & 4 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Q.2

$$\begin{pmatrix} -1 & -3 & 3 & -1 \\ -2 & -2 & 0 & 1 \\ 3 & 8 & -4 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Q.3

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & -4 & 1 \\ -7 & -1 & 9 & -1 \\ 7 & 0 & -7 & 2 \\ -4 & 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

問題 3　次の連立方程式を解きなさい。

Q.1

$$\begin{cases} -4x_0 - 6x_1 + 2x_3 = -6 \\ x_1 - x_2 - 3x_3 = 3 \\ 3x_0 + 7x_1 + x_2 - 2x_3 = 12 \\ -x_0 - 4x_1 + 3x_3 = -9 \\ -x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

Q.2

$$\begin{cases} 7x_0 - 6x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -28 \\ -2x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ -6x_0 + 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 19 \\ 3x_0 - x_2 - 2x_3 - 4x_4 = 0 \\ -7x_0 + 6x_1 + 5x_2 - 2x_3 - x_4 = 28 \end{cases}$$

Q.3

$$\begin{cases} -x_0 + 2x_1 - 2x_3 = -3 \\ 2x_0 - 4x_1 + 4x_3 = -5 \\ -3x_0 + 6x_1 - 6x_3 = 4 \\ x_0 - 2x_1 + 2x_3 = -5 \\ x_0 - 2x_1 + 2x_3 = 3 \end{cases}$$

問題 4

一般に、二つの実ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ に対して、$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2 = |\boldsymbol{a}|^2 + 2(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + |\boldsymbol{b}|^2$ が成立することを示せ。

問題 5　三つの実ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ に対して、$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{c}$ の交角を θ_1, $\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{c}$ の交角を θ_2 とし、また、$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の長さは等しいとする。この時、$\theta_1 = \theta_2 \Rightarrow (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ を示せ。

問題 6　空間ベクトルの三つの基本ベクトル e_1, e_2, e_3 について、この基本ベクトルは互いに直交していることを示せ。

代幾 I 小テスト [解答] (2006/10/12)

問題 1　次の行列の rank をもとめなさい。

A.1 $\mathrm{rank} = 4$

A.2 $\mathrm{rank} = 3$

A.3 $\mathrm{rank} = 2$

問題 2　次の行列の逆行列をもとめなさい。

A.1

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 21 & 10 & 13 & 8 \\ 8 & 4 & 5 & 3 \\ 7 & 3 & 5 & 3 \\ 17 & 8 & 11 & 7 \end{pmatrix}$$

A.2

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 8 & 12 & 7 & 4 \\ 7 & 10 & 6 & 3 \\ 20 & 29 & 17 & 9 \\ 30 & 45 & 26 & 14 \end{pmatrix}$$

A.3

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 12 & 18 & 13 \\ 1 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 7 & 11 & 7 \end{pmatrix}$$

問題 3　次の連立方程式を解きなさい。

A.1

$$\begin{cases} x_0 = -p_0 - 3 \\ x_1 = p_0 + 3 \\ x_2 = -2p_0 \\ x_3 = p_0 \end{cases}$$

不定

A.2

$$\begin{cases} x_0 = -4 \\ x_1 = 1 \\ x_2 = -2 \\ x_3 = -1 \\ x_4 = -2 \end{cases}$$

単一

A.3

$$\begin{cases} x_0 - 2x_1 + 2x_3 = -3 \\ 0 = 2 \\ 0 = 1 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

不能

問題 4

Q. 一般に、二つの実ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ に対して、$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2 = |\boldsymbol{a}|^2 + 2(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + |\boldsymbol{b}|^2$ が成立することを示せ。

A.

$$
\begin{aligned}
\text{左辺} &= (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) && \text{(長さと内積の関係)} \\
&= (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) + (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}) + (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}) \\
&= |\boldsymbol{a}|^2 + (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + |\boldsymbol{b}|^2 && \text{(内積の性質)} \\
&= |\boldsymbol{a}|^2 + 2(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + |\boldsymbol{b}|^2 \\
&= \text{右辺}
\end{aligned}
$$

よって、

$$
\text{左辺} = \text{右辺}
$$

よって、与えられた等式は成立する。

問題 5

Q. 三つの実ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ に対して、$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{c}$ の交角を θ_1, $\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{c}$ の交角を θ_2 とし、また、$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の長さは等しいとする。この時、$\theta_1 = \theta_2 \Rightarrow (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ を示せ。

A.

$$
\begin{aligned}
\text{左辺} &= (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) \\
&= |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{c}|\cos\theta_1 && \text{(内積の定義)} \\
&= |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{c}|\cos\theta_2 && \text{(仮定より}\theta_1 = \theta_2\text{)} \\
&= |\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}|\cos\theta_2 && \text{(仮定より } |\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{b}|\text{)} \\
&= (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) && \text{(内積の定義)} \\
&= \text{右辺}
\end{aligned}
$$

よって、

$$
\text{左辺} = \text{右辺}
$$

よって、与えられた等式は成立する。

問題 6

Q. 空間ベクトルの三つの基本ベクトル e_1, e_2, e_3 について、この基本ベクトルは互いに直交していることを示せ。

A. e_1, e_2 のなす角を θ とすると、$(e_1, e_2) = |e_1||e_2|\cos\theta$ すなわち、$\cos\theta = \frac{(e_1, e_2)}{|e_1||e_2|}$ である。

ここで、$|e_1| = \sqrt{(e_1, e_1)} = \sqrt{1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0} = \sqrt{1} = 1$, $|e_2| = \sqrt{(e_2, e_2)} = \sqrt{0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0} = \sqrt{1} = 1$, $(e_1, e_2) = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 0$ から、$\cos\theta = \frac{0}{1 \cdot 1} = 0$ より、$\theta = \frac{\pi}{2} + n\pi$。よって、$e_1$ と e_2 は直交する

e_1 と e_3、e_2 と e_3 についても同様に示すことができる。