代幾 I 小テスト [問題] (2006/11/16)

問題 1　次の連立方程式を解きなさい。

Q.1

$$\begin{cases} x_0 + 5x_1 - 9x_2 - 14x_3 = 16 \\ -7x_1 + 14x_2 + 21x_3 = -19 \\ -3x_0 - 17x_1 + 31x_2 + 48x_3 = -35 \\ 2x_0 + 19x_1 - 36x_2 - 55x_3 = 44 \end{cases}$$

Q.2

$$\begin{cases} -x_0 + 4x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = -21 \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 - x_4 = -15 \\ 2x_0 - 3x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 8 \\ -2x_0 + 2x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -1 \\ 2x_0 - 9x_1 - 5x_2 + 10x_3 + 2x_4 = 40 \end{cases}$$

Q.3

$$\begin{cases} x_0 - 5x_1 + x_2 + 10x_3 = 11 \\ 5x_1 - x_2 - 12x_3 = -15 \\ -2x_0 + 4x_1 - 8x_3 = -4 \\ -x_0 - x_1 + 5x_3 = 7 \end{cases}$$

問題 2　次の二つの置換の積を求めなさい。

Q.1

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}, \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Q.2

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 7 & 6 & 2 \end{pmatrix}, \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 5 & 6 & 1 & 4 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

Q.3

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 1 & 3 & 2 & 6 & 7 \end{pmatrix}, \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 7 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

問題 3　次の置換の符号を求めなさい。

Q.1

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Q.2

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 8 & 5 & 9 & 2 & 6 & 7 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Q.3

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 8 & 5 & 9 & 7 & 1 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

問題 4　次の行列式を求めなさい。

Q.1

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -3 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

Q.2

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ -2 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

Q.3

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -3 \\ -1 & -3 & -3 \end{vmatrix}$$

問題 5　3 次の置換群 S_3 の要素を全て求めよ。

問題 6

空間ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ が次の様に成分表示されているとする。

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

この時、次の等式を、成分の計算を用いて証明しなさい。

(1) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$

(2) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}$

(3) $\boldsymbol{a}+0 = \boldsymbol{a}$ (ただし、0 は 0 ベクトルとする)。

代幾 I 小テスト [解答] (2006/11/16)

問題 1　次の連立方程式を解きなさい。

A.1 解なし (不定)

$$\begin{cases} x_0 & & + & x_2 & + & x_3 & & = & -1 \\ & x_1 & - & 2x_2 & - & 3x_3 & & = & 1 \\ & & & & & & 0 & = & 3 \\ & & & & & & 0 & = & -3 \end{cases}$$

A.2

$$\begin{cases} x_0 & = & & 1 \\ x_1 & = & - & 3 \\ x_2 & = & & 1 \\ x_3 & = & & 1 \\ x_4 & = & & 3 \end{cases}$$

A.3

$$\begin{cases} x_0 & = & 2p_0 & - & 4 \\ x_1 & = & 3p_0 & - & 3 \\ x_2 & = & 3p_0 & & \\ x_3 & = & p_0 & & \end{cases}$$

問題 2　次の二つの置換の積を求めなさい。

A.1

$$\tau\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

A.2

$$\tau\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 5 & 6 & 1 & 4 & 7 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 7 & 6 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 4 & 1 & 2 & 3 & 7 & 5 \end{pmatrix}$$

A.3

$$\tau\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 7 & 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 1 & 3 & 2 & 6 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 7 & 2 & 3 & 5 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

問題 3　次の置換の符号を求めなさい。

A.1

$$\mathrm{sgn}\sigma = -1$$

A.2

$$\mathrm{sgn}\sigma = 1$$

A.3

$$\mathrm{sgn}\sigma = 1$$

問題 4　次の行列式を求めなさい。

A.1

$$\begin{aligned} &= \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -3 & 2 & 0 \end{vmatrix} \\ &= 11 \end{aligned}$$

A.2

$$\begin{aligned} &= \begin{vmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ -2 & -3 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 12 \end{aligned}$$

A.3

$$\begin{aligned} &= \begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -3 \\ -1 & -3 & -3 \end{vmatrix} \\ &= 3 \end{aligned}$$

問題 5

Q. 3 次の置換群 S_3 の要素を全て求めよ。

A.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

問題 6

Q. 空間ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ が次の様に成分表示されているとする。

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

この時、次の等式を、成分の計算を用いて証明しなさい。

(1) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$

(2) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}$

(3) $\boldsymbol{a}+0 = \boldsymbol{a}$ (ただし、0 は 0 ベクトルとする)。

A. (1)

$$
\begin{aligned}
\text{左辺} &= (\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}) + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (a_1 + b_1) + c_1 \\ (a_2 + b_2) + c_2 \\ (a_3 + b_3) + c_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_1 + (b_1 + c_1) \\ a_2 + (b_2 + c_2) \\ a_3 + (b_3 + c_3) \end{pmatrix} & \text{(実数における結合律)} \\
&= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 + c_1 \\ b_2 + c_2 \\ b_3 + c_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + (\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}) \\
&= \text{右辺}
\end{aligned}
$$

よって、

$$
\text{左辺} = \text{右辺}
$$

よって、与えられた等式は成立する。

(2)

$$
\begin{aligned}
\text{左辺} &= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} b_1 + a_1 \\ b_2 + a_2 \\ b_3 + a_3 \end{pmatrix} \qquad\qquad (\text{実数における交換律}) \\
&= \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \\
&= \text{右辺}
\end{aligned}
$$

よって、

$$
\text{左辺} = \text{右辺}
$$

よって、与えられた等式は成立する。

(3)

$$
\begin{aligned}
\text{左辺} &= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_1 + 0 \\ a_2 + 0 \\ a_3 + 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \qquad\qquad (\text{実数における単位元}) \\
&= \text{右辺}
\end{aligned}
$$

よって、

$$
\text{左辺} = \text{右辺}
$$

よって、与えられた等式は成立する。