代幾 I 小テスト [問題] (2007/01/11)

問題 1　次の連立方程式を解きなさい

Q.1

$$\begin{cases} x_0 + x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_0 - 3x_1 - x_2 - 2x_3 = 2 \\ x_0 + 9x_1 + x_2 + 4x_3 = 4 \\ x_0 - 27x_1 - x_2 - 8x_3 = 8 \end{cases}$$

Q.2

$$\begin{cases} x_0 + x_1 + x_2 = 1 \\ -3x_0 + 3x_1 - x_2 = -2 \\ 9x_0 + 9x_1 + x_2 = 4 \end{cases}$$

Q.3

$$\begin{cases} x_0 + x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ -x_0 - 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_0 + 4x_1 + 9x_2 + 9x_3 = 1 \\ -x_0 - 8x_1 - 27x_2 + 27x_3 = 1 \end{cases}$$

問題 2　次の行列の行列式を求めなさい

Q.1

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & -2 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 & 2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & -1 & -1 & -2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & -2 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 0 & 2 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Q.2

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 & -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & 2 & -2 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & -2 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & -2 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Q.3

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

問題 3　次の行列の逆行列を求めなさい

Q.1

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Q.2

$$\begin{pmatrix} 3 & -8 & 9 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -8 & 7 & 2 \\ -4 & 8 & -7 & -1 \end{pmatrix}$$

Q.3

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & -3 & 3 \\ 4 & 3 & -3 & 2 \\ -5 & -4 & 4 & -3 \\ -4 & -3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

問題 4

正則な n 次正方行列 A の縦ベクトルを、それぞれ $\boldsymbol{a}_1, .., \boldsymbol{a}_n$ とする時、連立方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}_i \, (i = 1..n)$ の解が、e_i (i 番目の単位行列) となることを示せ。

問題 5　A を実数を成分とする二行二列 (二次の正方行列)、$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ を二次元 (平面) の縦ベクトル、c を実数とすると、次の線型性が成立することを示しなさい。

$$A(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = (A\boldsymbol{x}) + (A\boldsymbol{y})$$

$$(cA)\boldsymbol{x} = A(c\boldsymbol{x})$$

(ヒント:行列 A 並びに、ベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ を成分表示し、等号の左辺と右辺の結果が同じであることを示せばよい)

問題 6　行列 X が実対称行列、Y が実交代行列の時、$A = X + iY$ で表される複素行列 A は、エルミート行列であることを示せ。

代幾 I 小テスト [解答] (2007/01/11)

問題 1　次の連立方程式を解きなさい

A.1

$$\begin{cases} x_0 = \frac{5}{2} \\ x_1 = -\frac{3}{2} \\ x_2 = -5 \\ x_3 = 5 \end{cases}$$

A.2

$$\begin{cases} x_0 = \frac{5}{12} \\ x_1 = -\frac{1}{24} \\ x_2 = \frac{5}{8} \end{cases}$$

A.3

$$\begin{cases} x_0 = 3 \\ x_1 = -\frac{16}{5} \\ x_2 = 1 \\ x_3 = \frac{1}{5} \end{cases}$$

問題 2　次の行列の行列式を求めなさい

A.1

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & -2 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 & 2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & -1 & -1 & -2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & -2 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 0 & 2 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -242$$

A.2

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 & -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & 2 & -2 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & -2 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & -2 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1090$$

A.3

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -48$$

問題 3　　次の行列の逆行列を求めなさい

A.1

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

A.2

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & 16 & 0 & 9 \\ 35 & 79 & 1 & 46 \\ 32 & 72 & 1 & 42 \\ 28 & 64 & 1 & 37 \end{pmatrix}$$

A.3

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 0 \\ 1 & 10 & 7 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

問題 4

Q. 正則な n 次正方行列 A の縦ベクトルを、それぞれ $\boldsymbol{a}_1, .., \boldsymbol{a}_n$ とする時、連立方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}_i \, (i = 1..n)$ の解が、e_i (i 番目の単位行列) となることを示せ。

A. クラメルの公式より、j 番目の変数 x_j の答は、次のようになる。

$$x_j = \frac{\det(\boldsymbol{a}_1, .., \overset{j\text{ 番目}}{\overset{\downarrow}{\boldsymbol{a}_i}}, .., \boldsymbol{a}_n)}{\det(\boldsymbol{a}_1, .., \boldsymbol{a}_j, .., \boldsymbol{a}_n)}$$

ところが、$j = i$ の時は、この式の分子は、分母と同じ $|A|$ となるので、結局 $x_i = 1$ となり、また、$j \neq i$ の時は、分子の行列式の中に同じ、縦じベクトル $\boldsymbol{a}_i$ が二度現れるので、その値は、0 となり、結局 $x_j = \frac{0}{|A|} = 0$ ($j \neq i$ の時) となる。

これより $\boldsymbol{x} = (\delta_{i,j}) = \boldsymbol{e}_i$ となるので題意は示された。

問題 5

Q. A を実数を成分とする二行二列 (二次の正方行列)、$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ を二次元 (平面) の縦ベクトル、c を実数とすると、次の線型性が成立することを示しなさい。

$$A(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = (A\boldsymbol{x}) + (A\boldsymbol{y})$$

$$(cA)\boldsymbol{x} = A(c\boldsymbol{x})$$

(ヒント:行列 A 並びに、ベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ を成分表示し、等号の左辺と右辺の結果が同じであることを示せばよい)

A. 行列 A 並びに、ベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ の成分を次のようにおく。

$$A = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}, \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

すると、それぞれの等式は以下のように示すことができる。

和

$$\begin{aligned}
\text{左辺} &= A(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}) \\
&= \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} p(x_1+y_1)+q(x_2+y_2) \\ r(x_1+y_1)+s(x_2+y_2) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} px_1+py_1+qx_2+qy_2 \\ rx_1+ry_1+sx_2+sy_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (px_1+qx_2)+(py_1+qy_2) \\ (rx_1+sx_2)+(ry_1+sy_2) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} px_1+qx_2 \\ rx_1+sx_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} py_1+qy_2 \\ ry_1+sy_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \\
&= \text{右辺}
\end{aligned}$$

よって、

$$\text{左辺} = \text{右辺}$$

よって、与えられた等式は成立する。

定数倍

$$
\begin{aligned}
\text{左辺} &= (c\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix})\boldsymbol{x} \\
&= \begin{pmatrix} cp & cq \\ cr & cs \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} cpx_1 + cqx_2 \\ crx_1 + csx_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} p(cx_1) + q(cx_2) \\ r(cx_1) + s(cx_2) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} cx_1 \\ cx_2 \end{pmatrix} \\
&= A(c\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}) \\
&= \text{右辺}
\end{aligned}
$$

よって、

$$\text{左辺} = \text{右辺}$$

よって、与えられた等式は成立する。

問題 6

Q. 行列 X が実対称行列、Y が実交代行列の時、$A = X + iY$ で表される複素行列 A は、エルミート行列であることを示せ。

A.

A がエルミート行列であることを示すには、$A^* = A$ を示せばよい。

$$
\begin{aligned}
\text{左辺} &= (X + iY)^* \\
&= X^* + (iY)^* \\
&= X + (iY)^* && (\text{仮定より } X \text{ は実対称行列なので、} X^* = X) \\
&= X + (-i)(Y^*) && (\overline{cA} = \overline{c}\overline{A}) \\
&= X + (-i)(-Y) && (\text{仮定より } X \text{ は実交代行列なので、} Y^* = -Y) \\
&= X + iY \\
&= \text{右辺}
\end{aligned}
$$

よって、

$$\text{左辺} = \text{右辺}$$

よって、与えられた等式は成立する。 すなわち、A はエルミート行列である。