

代幾 I 計算演習 [問題] (2007/10/25)

問. 次の行列の逆行列を求めなさい

Q.1

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

Q.7

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -5 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Q.2

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Q.8

$$\begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 & -1 \\ -2 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & -6 & -3 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Q.3

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -5 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

Q.9

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 & 5 \\ -2 & 3 & -2 & 2 \\ -1 & -5 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Q.4

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 & -1 \\ -3 & -2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & -3 & -1 \\ -6 & -6 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Q.10

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Q.5

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Q.11

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 & -3 \\ 0 & -5 & -6 & 4 \\ 2 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Q.6

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Q.12

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

代幾 I 計算演習 [解答] (2007/10/25)

A.1

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 2 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

前進消去を行います。

対角要素を要に下の要素を掃き出します。

左 R(2,1;-2) ; 2行目に1行目を-2倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 2 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

左 R(3,1;2) ; 3行目に1行目を2倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

左 R(4,1;1) ; 4行目に1行目を1倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素 (3, 3) が 0 なので、0でない要素を探したところ、(4, 3) に 0でない要素を

みつけましたので、それを対角要素と交換します。

左 P(3,4) ; 3行目と4行目を交換

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

後退消去を行います。

3列目を掃き出します。

左 R(1,4;-2) ; 1行目に4行目を-2倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & -1 & 0 & -3 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

左 R(2,4;5) ; 2行目に4行目を5倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & -1 & 0 & -3 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 8 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

左 R(3,4;2) ; 3行目に4行目を2倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & -1 & 0 & -3 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 8 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

2列目を掃き出します。

左 $R(1,3;1)$; 1 行目に 3 行目を 1 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 8 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

1 列目を掃き出します。

左 $R(1,2;1)$; 1 行目に 2 行目を 1 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 10 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 8 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 10 & 1 & 5 & 1 \\ 8 & 1 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

A.2

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

前進消去を行います。

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。

左 $Q(1;-1)$; 1 行目を -1 倍

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素を要に下の要素を掃き出します。

左 $R(2,1;-2)$; 2 行目に 1 行目を -2 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

左 $R(3,1;2)$; 3 行目に 1 行目を 2 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素を要に下の要素を掃き出します。

左 $R(3,2;3)$; 3 行目に 2 行目を 3 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 3 & 1 \end{array} \right)$$

後退消去を行います。

1 列目を掃き出します。

左 $R(1,2;1)$; 1 行目に 2 行目を 1 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 3 & 1 \end{array} \right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

A.3

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} -2 & 2 & -2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -5 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

前進消去を行います。

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。

左 $Q(1; -\frac{1}{2})$; 1 行目を $-\frac{1}{2}$ 倍

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -5 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素を要に下の要素を掃き出します。

左 $R(3,1;-1)$; 3 行目に 1 行目を -1 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -6 & \frac{7}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

左 $R(4,1;-2)$; 4 行目に 1 行目を -2 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -6 & \frac{7}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。

左 $Q(2; -\frac{1}{3})$; 2 行目を $-\frac{1}{3}$ 倍

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -6 & \frac{7}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素を要に下の要素を掃き出します。

左 $R(3,2;-4)$; 3 行目に 2 行目を -4 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{10}{3} & \frac{7}{2} & \frac{1}{2} & \frac{4}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

左 $R(4,2;-3)$; 4 行目に 2 行目を -3 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{10}{3} & \frac{7}{2} & \frac{1}{2} & \frac{4}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。

左 $Q(3; -\frac{3}{10})$; 3 行目を $-\frac{3}{10}$ 倍

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{21}{20} & -\frac{3}{20} & -\frac{2}{5} & -\frac{3}{10} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素を要に下の要素を掃き出します。

左 $R(4,3;-1)$; 4 行目に 3 行目を -1 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{21}{20} & -\frac{3}{20} & -\frac{2}{5} & -\frac{3}{10} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{20} & \frac{23}{20} & \frac{7}{5} & \frac{3}{10} & 1 \end{array} \right)$$

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。

左 $Q(4;20)$; 4 行目を 20 倍

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{21}{20} & -\frac{3}{20} & -\frac{2}{5} & -\frac{3}{10} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 23 & 28 & 6 & 20 \end{array} \right)$$

後退消去を行います。

3 列目を掃き出します。

左 $R(1,4;\frac{3}{2})$; 1 行目に 4 行目を $\frac{3}{2}$ 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 1 & 0 & 34 & 42 & 9 & 30 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{21}{20} & -\frac{3}{20} & -\frac{2}{5} & -\frac{3}{10} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 23 & 28 & 6 & 20 \end{array} \right)$$

左 $R(3,4;\frac{21}{20})$; 3 行目に 4 行目を $\frac{21}{20}$ 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 1 & 0 & 34 & 42 & 9 & 30 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 24 & 29 & 6 & 21 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 23 & 28 & 6 & 20 \end{array} \right)$$

2 列目を掃き出します。

左 $R(1,3;-1)$; 1 行目に 3 行目を -1 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 10 & 13 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 24 & 29 & 6 & 21 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 23 & 28 & 6 & 20 \end{array} \right)$$

左 $R(2,3;\frac{2}{3})$; 2 行目に 3 行目を $\frac{2}{3}$ 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 10 & 13 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 16 & 19 & 4 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 24 & 29 & 6 & 21 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 23 & 28 & 6 & 20 \end{array} \right)$$

1 列目を掃き出します。

左 $R(1,2;1)$; 1 行目に 2 行目を 1 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 26 & 32 & 7 & 23 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 16 & 19 & 4 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 24 & 29 & 6 & 21 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 23 & 28 & 6 & 20 \end{array} \right)$$

$$A^{-1} = \left(\begin{array}{cccc} 26 & 32 & 7 & 23 \\ 16 & 19 & 4 & 14 \\ 24 & 29 & 6 & 21 \\ 23 & 28 & 6 & 20 \end{array} \right)$$

A.4

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 3 & 3 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & -3 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -6 & -6 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

前進消去を行います。

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。

左 $Q(1;\frac{1}{3})$; 1 行目を $\frac{1}{3}$ 倍

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & -3 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -6 & -6 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素を要に下の要素を掃き出します。

左 R(2,1;3) ; 2行目に1行目を3倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & -3 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -6 & -6 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

左 R(3,1;-4) ; 3行目に1行目を-4倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -\frac{5}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{4}{3} & 0 & 1 & 0 \\ -6 & -6 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

左 R(4,1;6) ; 4行目に1行目を6倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -\frac{5}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{4}{3} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素を要に下の要素を掃き出します。

左 R(3,2;1) ; 3行目に2行目を1倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素が1でないので1に正規化します。

左 Q(3;- $\frac{3}{5}$) ; 3行目を $-\frac{3}{5}$ 倍

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} & -\frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素を要に下の要素を掃き出します。

左 R(4,3;-1) ; 4行目に3行目を-1倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} & -\frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{9}{5} & \frac{3}{5} & \frac{3}{5} & 1 \end{array} \right)$$

対角要素が1でないので1に正規化します。

左 Q(4;5) ; 4行目を5倍

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} & -\frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 9 & 3 & 3 & 5 \end{array} \right)$$

後退消去を行います。

3列目を掃き出します。

左 R(1,4; $\frac{1}{3}$) ; 1行目に4行目を $\frac{1}{3}$ 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{10}{3} & 1 & 1 & \frac{5}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} & -\frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 9 & 3 & 3 & 5 \end{array} \right)$$

左 R(3,4; $\frac{1}{5}$) ; 3行目に4行目を $\frac{1}{5}$ 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{10}{3} & 1 & 1 & \frac{5}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 9 & 3 & 3 & 5 \end{array} \right)$$

2列目を掃き出します。

左 $R(1,3;\frac{1}{3})$; 1行目に3行目を $\frac{1}{3}$ 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 4 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 9 & 3 & 3 & 5 \end{array} \right)$$

1列目を掃き出します。

左 $R(1,2;-1)$; 1行目に2行目を -1 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 9 & 3 & 3 & 5 \end{array} \right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 9 & 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

A.5

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

前進消去を行います。

対角要素(1,1)が0なので、0でない要素を探したところ、(2,1)に0でない要素を

みつけましたので、それを対角要素と交換します。

左 $P(1,2)$; 1行目と2行目を交換

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素が1でないので1に正規化します。

左 $Q(1;-\frac{1}{2})$; 1行目を $-\frac{1}{2}$ 倍

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{3}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素を要に下の要素を掃き出します。

左 $R(3,1;-1)$; 3行目に1行目を -1 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{3}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{array} \right)$$

対角要素を要に下の要素を掃き出します。

左 $R(3,2;\frac{1}{2})$; 3行目に2行目を $\frac{1}{2}$ 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{3}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{array} \right)$$

対角要素が1でないので1に正規化します。

左 $Q(3,2)$; 3行目を2倍

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{3}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

後退消去を行います。

2列目を掃き出します。

左 R(2,3;1) ; 2行目に3行目を1倍して、加える

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{3}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

1列目を掃き出します。

左 R(1,2; $\frac{3}{2}$) ; 1行目に2行目を $\frac{3}{2}$ 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

A.6

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

前進消去を行います。

対角要素が1でないので1に正規化します。

左 Q(1; $\frac{1}{2}$) ; 1行目を $\frac{1}{2}$ 倍

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素を要に下の要素を掃き出します。

左 R(2,1;1) ; 2行目に1行目を1倍して、加える

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -2 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

左 R(3,1;2) ; 3行目に1行目を2倍して、加える

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -2 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素が1でないので1に正規化します。

左 Q(2;2) ; 2行目を2倍

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

後退消去を行います。

2列目を掃き出します。

左 R(1,3;-1) ; 1行目に3行目を-1倍して、加える

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

左 R(2,3;4) ; 2行目に3行目を4倍して、加える

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

1列目を掃き出します。

左 $R(1,2;\frac{1}{2})$; 1 行目に 2 行目を $\frac{1}{2}$ 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$A^{-1} = \left(\begin{array}{ccc} 2 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

A.7

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & 2 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

前進消去を行います。

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。

左 $Q(1;\frac{1}{3})$; 1 行目を $\frac{1}{3}$ 倍

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & 2 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素を要に下の要素を掃き出します。

左 $R(2,1;-2)$; 2 行目に 1 行目を -2 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & 1 & 0 \\ -5 & 2 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

左 $R(3,1;5)$; 3 行目に 1 行目を 5 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。

左 $Q(2;-3)$; 2 行目を -3 倍

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素を要に下の要素を掃き出します。

左 $R(3,2;-\frac{1}{3})$; 3 行目に 2 行目を $-\frac{1}{3}$ 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

後退消去を行います。

2 列目を掃き出します。

左 $R(1,3;-\frac{1}{3})$; 1 行目に 3 行目を $-\frac{1}{3}$ 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -4 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

左 $R(2,3;4)$; 2 行目に 3 行目を 4 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 6 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

1 列目を掃き出します。

左 $R(1,2;\frac{1}{3})$; 1 行目に 2 行目を $\frac{1}{3}$ 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$$A^{-1} = \left(\begin{array}{ccc} 2 & 0 & 1 \\ 6 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

A.8

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 4 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -6 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

前進消去を行います。

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。

左 Q(1; -1) ; 1 行目を -1 倍

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -4 & -3 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -6 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素を要に下の要素を掃き出します。

左 R(2,1;2) ; 2 行目に 1 行目を 2 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -4 & -3 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -4 & 3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -6 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

左 R(3,1;-2) ; 3 行目に 1 行目を -2 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -4 & -3 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -4 & 3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & -2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

左 R(4,1;1) ; 4 行目に 1 行目を 1 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -4 & -3 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -4 & 3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & -2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。

左 Q(2; -1/4) ; 2 行目を -1/4 倍

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -4 & -3 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -3/4 & 1/2 & -1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & -2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素を要に下の要素を掃き出します。

左 R(3,2;-2) ; 3 行目に 2 行目を -2 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -4 & -3 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -3/4 & 1/2 & -1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 1 & 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

左 R(4,2;1) ; 4 行目に 2 行目を 1 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -4 & -3 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -3/4 & 1/2 & -1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 1 & 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 5/4 & -1/2 & -1/4 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素を要に下の要素を掃き出します。

左 R(4,3;2) ; 4行目に3行目を2倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -4 & -3 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{2} & \frac{3}{4} & 2 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素が1でないので1に正規化します。

左 Q(4;4) ; 4行目を4倍

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -4 & -3 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & 3 & 8 & 4 \end{array} \right)$$

後退消去を行います。

3列目を掃き出します。

左 R(1,4;-1) ; 1行目に4行目を-1倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -4 & -3 & 0 & -7 & -3 & -8 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & 3 & 8 & 4 \end{array} \right)$$

左 R(2,4; $\frac{3}{4}$) ; 2行目に4行目を $\frac{3}{4}$ 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -4 & -3 & 0 & -7 & -3 & -8 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 5 & 2 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & 3 & 8 & 4 \end{array} \right)$$

左 R(3,4; $\frac{1}{2}$) ; 3行目に4行目を $\frac{1}{2}$ 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -4 & -3 & 0 & -7 & -3 & -8 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 5 & 2 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & 3 & 8 & 4 \end{array} \right)$$

2列目を掃き出します。

左 R(1,3;3) ; 1行目に3行目を3倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -4 & 0 & 0 & 5 & 3 & 7 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 5 & 2 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & 3 & 8 & 4 \end{array} \right)$$

左 R(2,3;-1) ; 2行目に3行目を-1倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -4 & 0 & 0 & 5 & 3 & 7 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & 3 & 8 & 4 \end{array} \right)$$

1列目を掃き出します。

左 R(1,2;4) ; 1行目に2行目を4倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 9 & 3 & 11 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & 3 & 8 & 4 \end{array} \right)$$

$$A^{-1} = \left(\begin{array}{cccc} 9 & 3 & 11 & 6 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 5 & 2 \\ 6 & 3 & 8 & 4 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 2 & -3 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & -2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -5 & 3 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

前進消去を行います。

対角要素 $(1, 1)$ が 0 なので、0 でない要素を探したところ、 $(2, 1)$ に 0 でない要素を見つけましたので、それを対角要素と交換します。

左 $P(1,2)$; 1 行目と 2 行目を交換

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} -2 & 3 & -2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -5 & 3 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。

左 $Q(1; -\frac{1}{2})$; 1 行目を $-\frac{1}{2}$ 倍

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -\frac{3}{2} & 1 & -1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -5 & 3 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素を要に下の要素を掃き出します。

左 $R(3,1;1)$; 3 行目に 1 行目を 1 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -\frac{3}{2} & 1 & -1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{13}{2} & 4 & -3 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

左 $R(4,1;-1)$; 4 行目に 1 行目を -1 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -\frac{3}{2} & 1 & -1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{13}{2} & 4 & -3 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{7}{2} & -1 & -1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。

左 $Q(2; \frac{1}{2})$; 2 行目を $\frac{1}{2}$ 倍

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -\frac{3}{2} & 1 & -1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{13}{2} & 4 & -3 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{7}{2} & -1 & -1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素を要に下の要素を掃き出します。

左 $R(3,2; \frac{13}{2})$; 3 行目に 2 行目を $\frac{13}{2}$ 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -\frac{3}{2} & 1 & -1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{23}{4} & \frac{53}{4} & \frac{13}{4} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{7}{2} & -1 & -1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array} \right)$$

左 $R(4,2; -\frac{7}{2})$; 4 行目に 2 行目を $-\frac{7}{2}$ 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -\frac{3}{2} & 1 & -1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{23}{4} & \frac{53}{4} & \frac{13}{4} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{17}{4} & -\frac{39}{4} & -\frac{7}{4} & \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。

左 $Q(3; -\frac{4}{23})$; 3 行目を $-\frac{4}{23}$ 倍

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -\frac{3}{2} & 1 & -1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{53}{23} & -\frac{13}{23} & \frac{2}{23} & -\frac{4}{23} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{17}{4} & -\frac{39}{4} & -\frac{7}{4} & \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素を要に下の要素を掃き出します。

左 $R(4,3;-\frac{17}{4})$; 4行目に3行目を $-\frac{17}{4}$ 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -\frac{3}{2} & 1 & -1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{53}{23} & -\frac{13}{23} & \frac{2}{23} & -\frac{4}{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{23} & \frac{15}{23} & \frac{3}{23} & \frac{17}{23} & 1 \end{array} \right)$$

対角要素が1でないので1に正規化します。

左 $Q(4;23)$; 4行目を23倍

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -\frac{3}{2} & 1 & -1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{53}{23} & -\frac{13}{23} & \frac{2}{23} & -\frac{4}{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 15 & 3 & 17 & 23 \end{array} \right)$$

後退消去を行います。

3列目を掃き出します。

左 $R(1,4;1)$; 1行目に4行目を1倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -\frac{3}{2} & 1 & 0 & 15 & \frac{5}{2} & 17 & 23 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{53}{23} & -\frac{13}{23} & \frac{2}{23} & -\frac{4}{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 15 & 3 & 17 & 23 \end{array} \right)$$

左 $R(2,4;-\frac{5}{2})$; 2行目に4行目を $-\frac{5}{2}$ 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -\frac{3}{2} & 1 & 0 & 15 & \frac{5}{2} & 17 & 23 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & 0 & -37 & -\frac{15}{2} & -\frac{85}{2} & -\frac{115}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{53}{23} & -\frac{13}{23} & \frac{2}{23} & -\frac{4}{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 15 & 3 & 17 & 23 \end{array} \right)$$

左 $R(3,4;\frac{53}{23})$; 3行目に4行目を $\frac{53}{23}$ 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -\frac{3}{2} & 1 & 0 & 15 & \frac{5}{2} & 17 & 23 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & 0 & -37 & -\frac{15}{2} & -\frac{85}{2} & -\frac{115}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 34 & 7 & 39 & 53 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 15 & 3 & 17 & 23 \end{array} \right)$$

2列目を掃き出します。

左 $R(1,3;-1)$; 1行目に3行目を -1 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -\frac{3}{2} & 0 & 0 & -19 & -\frac{9}{2} & -22 & -30 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & 0 & -37 & -\frac{15}{2} & -\frac{85}{2} & -\frac{115}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 34 & 7 & 39 & 53 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 15 & 3 & 17 & 23 \end{array} \right)$$

左 $R(2,3;\frac{3}{2})$; 2行目に3行目を $\frac{3}{2}$ 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -\frac{3}{2} & 0 & 0 & -19 & -\frac{9}{2} & -22 & -30 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 14 & 3 & 16 & 22 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 34 & 7 & 39 & 53 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 15 & 3 & 17 & 23 \end{array} \right)$$

1列目を掃き出します。

左 $R(1,2;\frac{3}{2})$; 1行目に2行目を $\frac{3}{2}$ 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 14 & 3 & 16 & 22 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 34 & 7 & 39 & 53 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 15 & 3 & 17 & 23 \end{array} \right)$$

$$A^{-1} = \left(\begin{array}{cccc} 2 & 0 & 2 & 3 \\ 14 & 3 & 16 & 22 \\ 34 & 7 & 39 & 53 \\ 15 & 3 & 17 & 23 \end{array} \right)$$

A.10

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

前進消去を行います。

対角要素を要に下の要素を掃き出します。

左 R(2,1;1) ; 2行目に1行目を1倍して、加える

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

左 R(3,1;-2) ; 3行目に1行目を-2倍して、加える

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 11 & -2 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素が1でないので1に正規化します。

左 Q(2; -1/5) ; 2行目を-1/5倍

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 11 & -2 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素を要に下の要素を掃き出します。

左 R(3,2;-11) ; 3行目に2行目を-11倍して、加える

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{11}{5} & 1 \end{array} \right)$$

対角要素が1でないので1に正規化します。

左 Q(3;5) ; 3行目を5倍

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 11 & 5 \end{array} \right)$$

後退消去を行います。

2列目を掃き出します。

左 R(2,3;1/5) ; 2行目に3行目を1/5倍して、加える

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 11 & 5 \end{array} \right)$$

1列目を掃き出します。

左 R(1,2;4) ; 1行目に2行目を4倍して、加える

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 8 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 11 & 5 \end{array} \right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 11 & 5 \end{pmatrix}$$

A.11

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 3 & 5 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -6 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

前進消去を行います。

対角要素が1でないので1に正規化します。

左 Q(1;-1) ; 1行目を-1倍

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -3 & -5 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -6 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素を要に下の要素を掃き出します。

左 $R(3,1;-2)$; 3行目に1行目を -2 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -3 & -5 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -6 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 11 & -7 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素が1でないので1に正規化します。

左 $Q(2;-\frac{1}{5})$; 2行目を $-\frac{1}{5}$ 倍

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -3 & -5 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{6}{5} & -\frac{4}{5} & 0 & -\frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 11 & -7 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素を要に下の要素を掃き出します。

左 $R(3,2;-8)$; 3行目に2行目を -8 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -3 & -5 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{6}{5} & -\frac{4}{5} & 0 & -\frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{7}{5} & -\frac{3}{5} & 2 & \frac{8}{5} & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

左 $R(4,2;-3)$; 4行目に2行目を -3 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -3 & -5 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{6}{5} & -\frac{4}{5} & 0 & -\frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{7}{5} & -\frac{3}{5} & 2 & \frac{8}{5} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} & 0 & \frac{3}{5} & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素が1でないので1に正規化します。

左 $Q(3;\frac{5}{7})$; 3行目を $\frac{5}{7}$ 倍

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -3 & -5 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{6}{5} & -\frac{4}{5} & 0 & -\frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{7} & \frac{10}{7} & \frac{8}{7} & \frac{5}{7} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} & 0 & \frac{3}{5} & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素を要に下の要素を掃き出します。

左 $R(4,3;\frac{3}{5})$; 4行目に3行目を $\frac{3}{5}$ 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -3 & -5 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{6}{5} & -\frac{4}{5} & 0 & -\frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{7} & \frac{10}{7} & \frac{8}{7} & \frac{5}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{7} & \frac{6}{7} & \frac{9}{7} & \frac{3}{7} & 1 \end{array} \right)$$

対角要素が1でないので1に正規化します。

左 $Q(4;7)$; 4行目を7倍

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -3 & -5 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{6}{5} & -\frac{4}{5} & 0 & -\frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{7} & \frac{10}{7} & \frac{8}{7} & \frac{5}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & 9 & 3 & 7 \end{array} \right)$$

後退消去を行います。

3列目を掃き出します。

左 $R(1,4;-3)$; 1行目に4行目を -3 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -3 & -5 & 0 & -19 & -27 & -9 & -21 \\ 0 & 1 & \frac{6}{5} & -\frac{4}{5} & 0 & -\frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{7} & \frac{10}{7} & \frac{8}{7} & \frac{5}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & 9 & 3 & 7 \end{array} \right)$$

左 R(2,4; $\frac{4}{5}$) ; 2行目に4行目を $\frac{4}{5}$ 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -3 & -5 & 0 & -19 & -27 & -9 & -21 \\ 0 & 1 & \frac{6}{5} & 0 & \frac{24}{5} & 7 & \frac{12}{5} & \frac{28}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{7} & \frac{10}{7} & \frac{8}{7} & \frac{5}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & 9 & 3 & 7 \end{array} \right)$$

左 R(3,4; $\frac{3}{7}$) ; 3行目に4行目を $\frac{3}{7}$ 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -3 & -5 & 0 & -19 & -27 & -9 & -21 \\ 0 & 1 & \frac{6}{5} & 0 & \frac{24}{5} & 7 & \frac{12}{5} & \frac{28}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 5 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & 9 & 3 & 7 \end{array} \right)$$

2列目を掃き出します。

左 R(1,3;5) ; 1行目に3行目を5倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -3 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & -6 \\ 0 & 1 & \frac{6}{5} & 0 & \frac{24}{5} & 7 & \frac{12}{5} & \frac{28}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 5 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & 9 & 3 & 7 \end{array} \right)$$

左 R(2,3; $-\frac{6}{5}$) ; 2行目に3行目を $-\frac{6}{5}$ 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -3 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 5 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & 9 & 3 & 7 \end{array} \right)$$

1列目を掃き出します。

左 R(1,2;3) ; 1行目に2行目を3倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 5 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & 9 & 3 & 7 \end{array} \right)$$

$$A^{-1} = \left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & 5 & 2 & 3 \\ 6 & 9 & 3 & 7 \end{array} \right)$$

A.12

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

前進消去を行います。

対角要素(1,1)が0なので、0でない要素を探したところ、(2,1)に0でない要素を見つけましたので、それを対角要素と交換します。

左 P(1,2) ; 1行目と2行目を交換

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素が1でないので1に正規化します。

左 Q(1; $-\frac{1}{3}$) ; 1行目を $-\frac{1}{3}$ 倍

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素を要に下の要素を掃き出します。

左 $R(3,1;-1)$; 3行目に1行目を -1 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 1 \end{array} \right)$$

対角要素を要に下の要素を掃き出します。

左 $R(3,2;\frac{1}{3})$; 3行目に2行目を $\frac{1}{3}$ 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 \end{array} \right)$$

対角要素が1でないので1に正規化します。

左 $Q(3,3)$; 3行目を3倍

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{array} \right)$$

後退消去を行います。

2列目を掃き出します。

左 $R(1,3;-\frac{1}{3})$; 1行目に3行目を $-\frac{1}{3}$ 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{array} \right)$$

左 $R(2,3;1)$; 2行目に3行目を1倍して、加える

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{array} \right)$$

1列目を掃き出します。

左 $R(1,2;\frac{2}{3})$; 1行目に2行目を $\frac{2}{3}$ 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{array} \right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$