

代幾 I 計算演習 [問題] (2007/11/08)

問. 次の行列の階数 (Rank) を求めよ

Q.1

$$\begin{pmatrix} 7 & -8 & -5 & 3 \\ -6 & 5 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ -8 & 8 & 6 & -3 \end{pmatrix}$$

Q.7

$$\begin{pmatrix} -9 & -9 & 9 \\ 4 & 4 & -4 \\ -3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

Q.2

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 & -2 \\ -3 & -9 & 3 \\ -3 & -9 & 3 \\ 2 & 6 & -2 \end{pmatrix}$$

Q.8

$$\begin{pmatrix} -7 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \\ 6 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

Q.3

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & -2 \\ 2 & -3 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Q.9

$$\begin{pmatrix} -6 & 6 & 6 & -6 \\ -2 & 2 & 2 & -2 \\ 9 & -9 & -9 & 9 \end{pmatrix}$$

Q.4

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & -3 & 2 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Q.10

$$\begin{pmatrix} 4 & -4 & 7 \\ 1 & -1 & 1 \\ -6 & 6 & -9 \\ 4 & -4 & 6 \end{pmatrix}$$

Q.5

$$\begin{pmatrix} -6 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Q.11

$$\begin{pmatrix} -1 & 5 & -2 & -1 & 3 \\ 1 & -9 & 5 & 1 & -6 \\ 0 & 7 & -5 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Q.6

$$\begin{pmatrix} 8 & -4 & -2 & -2 & 8 \\ -4 & 2 & 1 & 1 & -4 \\ 6 & -2 & -1 & -2 & 4 \\ -4 & 2 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

Q.12

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & -2 & 2 \\ 4 & -2 & 2 & -4 \\ -2 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

代幾 I 計算演習 [解答] (2007/11/08)

A.1

$$\begin{pmatrix} 7 & -8 & -5 & 3 \\ -6 & 5 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ -8 & 8 & 6 & -3 \end{pmatrix}$$

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。

左 $Q(1; \frac{1}{7})$; 1 行目を $\frac{1}{7}$ 倍

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{8}{7} & -\frac{5}{7} & \frac{3}{7} \\ -6 & 5 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ -8 & 8 & 6 & -3 \end{pmatrix}$$

対角要素をかなめに他の要素を掃き出します。

列を掃き出します。

左 $R(2,1;6)$; 2 行目に 1 行目を 6 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{8}{7} & -\frac{5}{7} & \frac{3}{7} \\ 0 & -\frac{13}{7} & -\frac{9}{7} & \frac{11}{7} \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ -8 & 8 & 6 & -3 \end{pmatrix}$$

左 $R(3,1;-2)$; 3 行目に 1 行目を -2 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{8}{7} & -\frac{5}{7} & \frac{3}{7} \\ 0 & -\frac{13}{7} & -\frac{9}{7} & \frac{11}{7} \\ 0 & \frac{9}{7} & \frac{3}{7} & -\frac{6}{7} \\ -8 & 8 & 6 & -3 \end{pmatrix}$$

左 $R(4,1;8)$; 4 行目に 1 行目を 8 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{8}{7} & -\frac{5}{7} & \frac{3}{7} \\ 0 & -\frac{13}{7} & -\frac{9}{7} & \frac{11}{7} \\ 0 & \frac{9}{7} & \frac{3}{7} & -\frac{6}{7} \\ 0 & -\frac{8}{7} & \frac{2}{7} & \frac{3}{7} \end{pmatrix}$$

行を掃き出します。

右 $R(1,2;\frac{8}{7})$; 2 列目に 1 列目を $\frac{8}{7}$ 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{5}{7} & \frac{3}{7} \\ 0 & -\frac{13}{7} & -\frac{9}{7} & \frac{11}{7} \\ 0 & \frac{9}{7} & \frac{3}{7} & -\frac{6}{7} \\ 0 & -\frac{8}{7} & \frac{2}{7} & \frac{3}{7} \end{pmatrix}$$

右 $R(1,3;\frac{5}{7})$; 3 列目に 1 列目を $\frac{5}{7}$ 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{7} \\ 0 & -\frac{13}{7} & -\frac{9}{7} & \frac{11}{7} \\ 0 & \frac{9}{7} & \frac{3}{7} & -\frac{6}{7} \\ 0 & -\frac{8}{7} & \frac{2}{7} & \frac{3}{7} \end{pmatrix}$$

右 $R(1,4;-\frac{3}{7})$; 4 列目に 1 列目を $-\frac{3}{7}$ 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{13}{7} & -\frac{9}{7} & \frac{11}{7} \\ 0 & \frac{9}{7} & \frac{3}{7} & -\frac{6}{7} \\ 0 & -\frac{8}{7} & \frac{2}{7} & \frac{3}{7} \end{pmatrix}$$

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。

左 $Q(2;-\frac{7}{13})$; 2 行目を $-\frac{7}{13}$ 倍

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{9}{13} & -\frac{11}{13} \\ 0 & \frac{9}{7} & \frac{3}{7} & -\frac{6}{7} \\ 0 & -\frac{8}{7} & \frac{2}{7} & \frac{3}{7} \end{pmatrix}$$

対角要素をかなめに他の要素を掃き出します。
列を掃き出します。

左 $R(3,2;-\frac{9}{7})$; 3行目に2行目を $-\frac{9}{7}$ 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{9}{13} & -\frac{11}{13} \\ 0 & 0 & -\frac{6}{13} & \frac{3}{13} \\ 0 & -\frac{8}{7} & \frac{2}{7} & \frac{3}{7} \end{pmatrix}$$

左 $R(4,2;\frac{8}{7})$; 4行目に2行目を $\frac{8}{7}$ 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{9}{13} & -\frac{11}{13} \\ 0 & 0 & -\frac{6}{13} & \frac{3}{13} \\ 0 & 0 & \frac{14}{13} & -\frac{7}{13} \end{pmatrix}$$

行を掃き出します。

右 $R(2,3;-\frac{9}{13})$; 3列目に2列目を $-\frac{9}{13}$ 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{11}{13} \\ 0 & 0 & -\frac{6}{13} & \frac{3}{13} \\ 0 & 0 & \frac{14}{13} & -\frac{7}{13} \end{pmatrix}$$

右 $R(2,4;\frac{11}{13})$; 4列目に2列目を $\frac{11}{13}$ 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6}{13} & \frac{3}{13} \\ 0 & 0 & \frac{14}{13} & -\frac{7}{13} \end{pmatrix}$$

対角要素が1でないので1に正規化します。

左 $Q(3,-\frac{13}{6})$; 3行目を $-\frac{13}{6}$ 倍

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{14}{13} & -\frac{7}{13} \end{pmatrix}$$

対角要素をかなめに他の要素を掃き出します。
列を掃き出します。

左 $R(4,3;-\frac{14}{13})$; 4行目に3行目を $-\frac{14}{13}$ 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

行を掃き出します。

右 $R(3,4;\frac{1}{2})$; 4列目に3列目を $\frac{1}{2}$ 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

rank = 3

A.2

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 & -2 \\ -3 & -9 & 3 \\ -3 & -9 & 3 \\ 2 & 6 & -2 \end{pmatrix}$$

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。

左 $Q(1; \frac{1}{2})$; 1 行目を $\frac{1}{2}$ 倍

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -3 & -9 & 3 \\ -3 & -9 & 3 \\ 2 & 6 & -2 \end{pmatrix}$$

対角要素をかなめに他の要素を掃き出します。

列を掃き出します。

左 $R(2,1;3)$; 2 行目に 1 行目を 3 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & -9 & 3 \\ 2 & 6 & -2 \end{pmatrix}$$

左 $R(3,1;3)$; 3 行目に 1 行目を 3 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & -2 \end{pmatrix}$$

左 $R(4,1;-2)$; 4 行目に 1 行目を -2 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

行を掃き出します。

右 $R(1,2;-3)$; 2 列目に 1 列目を -3 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

右 $R(1,3;1)$; 3 列目に 1 列目を 1 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

rank = 1

A.3

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & -2 \\ 2 & -3 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。

左 $Q(1; -\frac{1}{3})$; 1 行目を $-\frac{1}{3}$ 倍

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & 2 & 2 & -2 \\ 2 & -3 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

対角要素をかなめに他の要素を掃き出します。
列を掃き出します。

左 $R(2,1;-1)$; 2行目に1行目を -1 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{7}{3} & \frac{8}{3} & -\frac{7}{3} \\ 2 & -3 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

左 $R(3,1;-2)$; 3行目に1行目を -2 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{7}{3} & \frac{8}{3} & -\frac{7}{3} \\ 0 & -\frac{7}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} \\ -2 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

左 $R(4,1;2)$; 4行目に1行目を 2 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{7}{3} & \frac{8}{3} & -\frac{7}{3} \\ 0 & -\frac{7}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

行を掃き出します。

右 $R(1,2;\frac{1}{3})$; 2列目に1列目を $\frac{1}{3}$ 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{7}{3} & \frac{8}{3} & -\frac{7}{3} \\ 0 & -\frac{7}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

右 $R(1,3;\frac{2}{3})$; 3列目に1列目を $\frac{2}{3}$ 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{7}{3} & \frac{8}{3} & -\frac{7}{3} \\ 0 & -\frac{7}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

右 $R(1,4;-\frac{1}{3})$; 4列目に1列目を $-\frac{1}{3}$ 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{7}{3} & \frac{8}{3} & -\frac{7}{3} \\ 0 & -\frac{7}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。

左 $Q(2,\frac{3}{7})$; 2行目を $\frac{3}{7}$ 倍

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{8}{7} & -1 \\ 0 & -\frac{7}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

対角要素をかなめに他の要素を掃き出します。列を掃き出します。

左 $R(3,2;\frac{7}{3})$; 3行目に2行目を $\frac{7}{3}$ 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{8}{7} & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

左 $R(4,2;-\frac{4}{3})$; 4行目に2行目を $-\frac{4}{3}$ 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{8}{7} & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{13}{7} & 1 \end{pmatrix}$$

行を掃き出します。

右 $R(2,3;-\frac{8}{7})$; 3列目に2列目を $-\frac{8}{7}$ 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{13}{7} & 1 \end{pmatrix}$$

右 $R(2,4;1)$; 4列目に2列目を1倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{13}{7} & 1 \end{pmatrix}$$

対角要素が1でないので1に正規化します。

左 $Q(3;\frac{1}{2})$; 3行目を $\frac{1}{2}$ 倍

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{13}{7} & 1 \end{pmatrix}$$

対角要素をかなめに他の要素を掃き出します。

列を掃き出します。

左 $R(4,3;\frac{13}{7})$; 4行目に3行目を $\frac{13}{7}$ 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{14} \end{pmatrix}$$

行を掃き出します。

右 $R(3,4;\frac{1}{2})$; 4列目に3列目を $\frac{1}{2}$ 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{14} \end{pmatrix}$$

対角要素が1でないので1に正規化します。

左 $Q(4;14)$; 4行目を14倍

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

rank = 4

A.4

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & -3 & 2 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

対角要素をかなめに他の要素を掃き出します。

列を掃き出します。

左 $R(2,1;1)$; 2行目に1行目を1倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -3 & 2 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

左 $R(3,1;1)$; 3行目に1行目を1倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

左 R(4,1;2) ; 4行目に1行目を2倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

行を掃き出します。

右 R(1,2;-1) ; 2列目に1列目を-1倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

右 R(1,3;2) ; 3列目に1列目を2倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

右 R(1,4;1) ; 4列目に1列目を1倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

対角要素が1でないので1に正規化します。

左 Q(2; $\frac{1}{2}$) ; 2行目を $\frac{1}{2}$ 倍

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

対角要素をかなめに他の要素を掃き出します。
列を掃き出します。

左 R(3,2;2) ; 3行目に2行目を2倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

左 R(4,2;-1) ; 4行目に2行目を-1倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

行を掃き出します。

右 R(2,5; $\frac{1}{2}$) ; 5列目に2列目を $\frac{1}{2}$ 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

対角要素 (3, 3) が 0 なので、0 でない要素を探したところ、(4, 4) に 0 でない要素を見つけましたので、それを対角要素と交換します。

左 P(3,4) ; 3 行目と 4 行目を交換

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

右 P(3,4) ; 3 列目と 4 列目を交換

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。

左 Q(3;-1) ; 3 行目を -1 倍

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

対角要素をかなめに他の要素を掃き出します。

行を掃き出します。

右 R(3,5; $\frac{1}{2}$) ; 5 列目に 3 列目を $\frac{1}{2}$ 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

rank = 3

A.5

$$\begin{pmatrix} -6 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。

左 Q(1; $-\frac{1}{6}$) ; 1 行目を $-\frac{1}{6}$ 倍

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

対角要素をかなめに他の要素を掃き出します。

列を掃き出します。

左 R(2,1;1) ; 2 行目に 1 行目を 1 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{5}{3} & -\frac{4}{3} \\ 3 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

左 R(3,1;-3) ; 3 行目に 1 行目を -3 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{5}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

左 $R(4,1;-3)$; 4 行目に 1 行目を -3 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{5}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

左 $R(5,1;-3)$; 5 行目に 1 行目を -3 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{5}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

行を掃き出します。

右 $R(1,2;\frac{1}{3})$; 2 列目に 1 列目を $\frac{1}{3}$ 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{5}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

右 $R(1,3;\frac{1}{3})$; 3 列目に 1 列目を $\frac{1}{3}$ 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。

左 $Q(2;\frac{3}{5})$; 2 行目を $\frac{3}{5}$ 倍

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{5} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

対角要素をかなめに他の要素を掃き出します。

列を掃き出します。

左 $R(5,2;1)$; 5 行目に 2 行目を 1 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{5} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

行を掃き出します。

右 $R(2,3;\frac{4}{5})$; 3 列目に 2 列目を $\frac{4}{5}$ 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

対角要素 $(3, 3)$ が 0 なので、0 でない要素を探したところ、 $(5, 3)$ に 0 でない要素を見つけましたので、それを対角要素と交換します。

左 $P(3,5)$; 3 行目と 5 行目を交換

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。

左 Q(3;5) ; 3 行目を 5 倍

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

rank = 3

A.6

$$\begin{pmatrix} 8 & -4 & -2 & -2 & 8 \\ -4 & 2 & 1 & 1 & -4 \\ 6 & -2 & -1 & -2 & 4 \\ -4 & 2 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。

左 Q(1; $\frac{1}{8}$) ; 1 行目を $\frac{1}{8}$ 倍

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 1 \\ -4 & 2 & 1 & 1 & -4 \\ 6 & -2 & -1 & -2 & 4 \\ -4 & 2 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

対角要素をかなめに他の要素を掃き出します。

列を掃き出します。

左 R(2,1;4) ; 2 行目に 1 行目を 4 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & -2 & -1 & -2 & 4 \\ -4 & 2 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

左 R(3,1;-6) ; 3 行目に 1 行目を -6 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -2 \\ -4 & 2 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

左 R(4,1;4) ; 4 行目に 1 行目を 4 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

行を掃き出します。

右 R(1,2; $\frac{1}{2}$) ; 2 列目に 1 列目を $\frac{1}{2}$ 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

右 R(1,3; $\frac{1}{4}$) ; 3 列目に 1 列目を $\frac{1}{4}$ 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

右 $R(1,4;\frac{1}{4})$; 4 列目に 1 列目を $\frac{1}{4}$ 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

右 $R(1,5;-1)$; 5 列目に 1 列目を -1 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

対角要素 $(2, 2)$ が 0 なので、0 でない要素を探したところ、 $(3, 2)$ に 0 でない要素を見つけましたので、それを対角要素と交換します。

左 $P(2,3)$; 2 行目と 3 行目を交換

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

対角要素をかなめに他の要素を掃き出します。行を掃き出します。

右 $R(2,3;-\frac{1}{2})$; 3 列目に 2 列目を $-\frac{1}{2}$ 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

右 $R(2,4;\frac{1}{2})$; 4 列目に 2 列目を $\frac{1}{2}$ 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

右 $R(2,5;2)$; 5 列目に 2 列目を 2 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

rank = 2

A.7

$$\begin{pmatrix} -9 & -9 & 9 \\ 4 & 4 & -4 \\ -3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。

左 $Q(1;-\frac{1}{9})$; 1 行目を $-\frac{1}{9}$ 倍

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 4 & 4 & -4 \\ -3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

対角要素をかなめに他の要素を掃き出します。

列を掃き出します。

左 $R(2,1;-4)$; 2 行目に 1 行目を -4 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

左 $R(3,1;3)$; 3 行目に 1 行目を 3 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

行を掃き出します。

右 $R(1,2;-1)$; 2 列目に 1 列目を -1 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

右 $R(1,3;1)$; 3 列目に 1 列目を 1 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

rank = 1

A.8

$$\begin{pmatrix} -7 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \\ 6 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。

左 $Q(1;-\frac{1}{7})$; 1 行目を $-\frac{1}{7}$ 倍

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{7} & -\frac{2}{7} \\ 3 & -1 & -1 \\ 6 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

対角要素をかなめに他の要素を掃き出します。

列を掃き出します。

左 $R(2,1;-3)$; 2 行目に 1 行目を -3 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{7} & -\frac{2}{7} \\ 0 & \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \\ 6 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

左 $R(3,1;-6)$; 3 行目に 1 行目を -6 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{7} & -\frac{2}{7} \\ 0 & \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \\ 0 & -\frac{3}{7} & \frac{5}{7} \end{pmatrix}$$

行を掃き出します。

右 $R(1,2;\frac{3}{7})$; 2 列目に 1 列目を $\frac{3}{7}$ 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{2}{7} \\ 0 & \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \\ 0 & -\frac{3}{7} & \frac{5}{7} \end{pmatrix}$$

右 $R(1,3;\frac{2}{7})$; 3 列目に 1 列目を $\frac{2}{7}$ 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \\ 0 & -\frac{3}{7} & \frac{5}{7} \end{pmatrix}$$

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。

左 $Q(2;\frac{7}{2})$; 2 行目を $\frac{7}{2}$ 倍

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{3}{7} & \frac{5}{7} \end{pmatrix}$$

対角要素をかなめに他の要素を掃き出します。
列を掃き出します。

左 $R(3,2;\frac{3}{7})$; 3行目に2行目を $\frac{3}{7}$ 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

行を掃き出します。

右 $R(2,3;\frac{1}{2})$; 3列目に2列目を $\frac{1}{2}$ 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

対角要素が1でないので1に正規化します。

左 $Q(3,2)$; 3行目を2倍

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

rank = 3

A.9

$$\begin{pmatrix} -6 & 6 & 6 & -6 \\ -2 & 2 & 2 & -2 \\ 9 & -9 & -9 & 9 \end{pmatrix}$$

対角要素が1でないので1に正規化します。

左 $Q(1;-\frac{1}{6})$; 1行目を $-\frac{1}{6}$ 倍

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 & -2 \\ 9 & -9 & -9 & 9 \end{pmatrix}$$

対角要素をかなめに他の要素を掃き出します。
列を掃き出します。

左 $R(2,1;2)$; 2行目に1行目を2倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & -9 & -9 & 9 \end{pmatrix}$$

左 $R(3,1;-9)$; 3行目に1行目を -9 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

行を掃き出します。

右 $R(1,2;1)$; 2列目に1列目を1倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

右 $R(1,3;1)$; 3列目に1列目を1倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

右 $R(1,4;-1)$; 4列目に1列目を -1 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

rank = 1

$$\begin{pmatrix} 4 & -4 & 7 \\ 1 & -1 & 1 \\ -6 & 6 & -9 \\ 4 & -4 & 6 \end{pmatrix}$$

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。

左 $Q(1; \frac{1}{4})$; 1 行目を $\frac{1}{4}$ 倍

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{7}{4} \\ 1 & -1 & 1 \\ -6 & 6 & -9 \\ 4 & -4 & 6 \end{pmatrix}$$

対角要素をかなめに他の要素を掃き出します。

列を掃き出します。

左 $R(2,1;-1)$; 2 行目に 1 行目を -1 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{7}{4} \\ 0 & 0 & -\frac{3}{4} \\ -6 & 6 & -9 \\ 4 & -4 & 6 \end{pmatrix}$$

左 $R(3,1;6)$; 3 行目に 1 行目を 6 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{7}{4} \\ 0 & 0 & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \\ 4 & -4 & 6 \end{pmatrix}$$

左 $R(4,1;-4)$; 4 行目に 1 行目を -4 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{7}{4} \\ 0 & 0 & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

行を掃き出します。

右 $R(1,2;1)$; 2 列目に 1 列目を 1 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{7}{4} \\ 0 & 0 & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

右 $R(1,3;-\frac{7}{4})$; 3 列目に 1 列目を $-\frac{7}{4}$ 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

対角要素 (2, 2) が 0 なので、0 でない要素を探したところ、(2, 3) に 0 でない要素を見つけましたので、それを対角要素と交換します。

右 $P(2,3)$; 2 列目と 3 列目を交換

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{4} & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。

左 $Q(2;-\frac{4}{3})$; 2 行目を $-\frac{4}{3}$ 倍

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

対角要素をかなめに他の要素を掃き出します。
列を掃き出します。

左 $R(3,2;-\frac{3}{2})$; 3 行目に 2 行目を $-\frac{3}{2}$ 倍して、
加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

左 $R(4,2;1)$; 4 行目に 2 行目を 1 倍して、加
える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

rank = 2

A.11

$$\begin{pmatrix} -1 & 5 & -2 & -1 & 3 \\ 1 & -9 & 5 & 1 & -6 \\ 0 & 7 & -5 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。

左 $Q(1,-1)$; 1 行目を -1 倍

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & 1 & -3 \\ 1 & -9 & 5 & 1 & -6 \\ 0 & 7 & -5 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

対角要素をかなめに他の要素を掃き出します。
列を掃き出します。

左 $R(2,1;-1)$; 2 行目に 1 行目を -1 倍して、
加える

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & -4 & 3 & 0 & -3 \\ 0 & 7 & -5 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

行を掃き出します。

右 $R(1,2;5)$; 2 列目に 1 列目を 5 倍して、加
える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & -4 & 3 & 0 & -3 \\ 0 & 7 & -5 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

右 $R(1,3;-2)$; 3 列目に 1 列目を -2 倍して、
加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & -4 & 3 & 0 & -3 \\ 0 & 7 & -5 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

右 $R(1,4;-1)$; 4 列目に 1 列目を -1 倍して、
加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & -4 & 3 & 0 & -3 \\ 0 & 7 & -5 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

右 $R(1,5;3)$; 5 列目に 1 列目を 3 倍して、加
える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & 0 & -3 \\ 0 & 7 & -5 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。

左 $Q(2; -\frac{1}{4})$; 2 行目を $-\frac{1}{4}$ 倍

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{4} & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & 7 & -5 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

対角要素をかなめに他の要素を掃き出します。

列を掃き出します。

左 $R(3, 2; -7)$; 3 行目に 2 行目を -7 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{4} & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

行を掃き出します。

右 $R(2, 3; \frac{3}{4})$; 3 列目に 2 列目を $\frac{3}{4}$ 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

右 $R(2, 5; -\frac{3}{4})$; 5 列目に 2 列目を $-\frac{3}{4}$ 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。

左 $Q(3, 4)$; 3 行目を 4 倍

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

対角要素をかなめに他の要素を掃き出します。

行を掃き出します。

右 $R(3, 5; 1)$; 5 列目に 3 列目を 1 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

rank = 3

A.12

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & -2 & 2 \\ 4 & -2 & 2 & -4 \\ -2 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

対角要素をかなめに他の要素を掃き出します。

列を掃き出します。

左 $R(2, 1; 1)$; 2 行目に 1 行目を 1 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 2 & -4 \\ -2 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

左 $R(3, 1; -4)$; 3 行目に 1 行目を -4 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -6 & 4 \\ -2 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

左 $R(4,1;2)$; 4行目に1行目を2倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -6 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

行を掃き出します。

右 $R(1,3;-2)$; 3列目に1列目を-2倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -6 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

右 $R(1,4;2)$; 4列目に1列目を2倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -6 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

対角要素 $(2, 2)$ が0なので、0でない要素を探したところ、 $(3, 2)$ に0でない要素を見つけましたので、それを対角要素と交換します。

左 $P(2,3)$; 2行目と3行目を交換

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -6 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

対角要素が1でないので1に正規化します。

左 $Q(2;-\frac{1}{2})$; 2行目を $-\frac{1}{2}$ 倍

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

対角要素をかなめに他の要素を掃き出します。列を掃き出します。

左 $R(4,2;-1)$; 4行目に2行目を-1倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

行を掃き出します。

右 $R(2,3;-3)$; 3列目に2列目を-3倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

右 $R(2,4;2)$; 4列目に2列目を2倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

rank = 2