

代幾 I 演習 (2007/04/19)

例題 ドモアブルの公式を用いて \cos と \sin の倍角公式を同時に求めてみよう。

$$\cos 2\theta + i \sin 2\theta = e^{2i\theta} = (\cos \theta + i \sin \theta)^2$$

の右辺を展開すると、

$$\cos 2\theta + i \sin 2\theta = (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + i \cdot 2 \sin \theta \cos \theta$$

を得る。両辺の実部と虚部はそれぞれ等しいので、

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta,$$

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$$

となり倍角公式が同時に得られた。

問題 19 ドモアブルの公式を用いて、 \cos と \sin の 3 倍角公式を求めよ。

問題 20

1. $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ を利用して、三角関数の積を和に直す公式、

$$\cos \theta \sin \varphi = \frac{1}{2}(\sin(\theta + \varphi) - \sin(\theta - \varphi))$$

を証明せよ。

(ヒント: 右辺の形に注目して $\frac{1}{2}(e^{i(\theta+\varphi)} - e^{i(\theta-\varphi)})$ を用いることを考えてみよ。)

2. $\cos \theta \cos \varphi$ の公式と $\sin \theta \sin \varphi$ の公式を同時に導いてみよ。

問題 21 $r \neq 1$ であるような正の実数 r に対し、次の和を求めよ。

1. $1 + r \cos \theta + r^2 \cos 2\theta + \cdots + r^{n-1} \cos(n-1)\theta$

2. $r \sin \theta + r^2 \sin 2\theta + \cdots + r^{n-1} \sin(n-1)\theta$

問題 22 互いに素な正整数 a, b と整数 $0 \leq r < a$ と $0 \leq s < b$ が与えられている。

このとき、 a で割ると r 余り、 b で割ると s 余る整数で 0 以上 ab 未満のものがちょうど一つあることを示せ。

問題 23 a, b の最大公約数を d とし、整数 x_0, y_0 は $ax_0 + by_0 = d$ を満すとする。このとき、 $ax + by = d$ の整数解は整数 t を用いて

$$x = x_0 + \frac{bt}{d}, \quad y = y_0 - \frac{at}{d}$$

と書くことができることを示せ。

問題 24 $\alpha = 1 + i, \beta = 2 - i$ とする時、次の問に答えなさい。

1. 複素数 $\gamma = 4 + i$ を、二つの実数 a, b と複素数 α, β を利用して、 $\gamma = a\alpha + b\beta$ と表せたとする。この時、実数 a, b を求めなさい。
2. 一般に複素数 $\delta = x + yi$ ($x, y \in \mathbf{R}$) が与えられた時、この複素数 δ を、複素数 α, β と、実数 p, q を用いて、 $\delta = p\alpha + q\beta$ と表せる時に、この p, q を x, y を用いて表せ。
3. 二つの複素数 z_1, z_2 に対して、一方が他方の実数倍でない (即ち、任意の実数 c に対して $z_1 \neq cz_2$ かつ、 $z_2 \neq cz_1$ である) 時、「任意の複素数 z に対して、ある実数 u, v が存在し、 $z = uz_1 + vz_2$ と表せる」ことを示せ。

問題 25 二項定理の証明をしなさい (ヒント : 講義では、略証明を行っている)

問題 26

$N[x] = \{f(x) \mid x \text{ を変数とする自然数係数多項式} \}$

$C[x] = \{f(x) \mid x \text{ を変数とする複素係数多項式} \}$

とした時に、それぞれ、 $N[x]$ と、 $C[x]$ が四則 (和、差、積、商) と、多項式の合成に関して、閉じているならば、その証明を、閉じていないならば、その反例を挙げなさい。

問題 27 次の \deg の性質を証明しなさい。

1. $\deg (f(x) \pm g(x)) \leq \max(\deg f(x), \deg g(x))$
2. $\deg (f(x)g(x)) = \deg f(x) + \deg g(x)$ (ただし、 $f(x)$ も $g(x)$ も 0 でないとする)
3. $f(x) = h(x)g(x) + r(x)$ で ($g(x) \neq 0, h(x)$ は商) の時 $\deg h(x) = \deg f(x) - \deg g(x)$

問題 28 $\deg f(g(x))$ を $\deg f(x)$ と $\deg g(x)$ で表すと、どうなるか ? その関係を示し、証明しなさい。

問題 29 多項式 $f(x)$ を $x - a, x - b$ ($a \neq b$) で割った余りをそれぞれ r, s とするとき $f(x)$ を $(x - a)(x - b)$ で割った余りを求めよ。

問題 30 実係数の 3 次方程式 $x^3 + px + q = 0$ が虚根 $a + bi$ をもてば、 $-2a$ も根であることを示せ。