代幾 I 演習 (2007/04/26)

問題 31　任意の実数に対して、次の不等式の性質

(a) 任意の二つの実数 $x, y(x, y \in \boldsymbol{R})$ に対して、$x > y$, $x = y$, $x < y$ の内のいずれか一つが、必ず成立する。

(b) $a > b$ の時、$x > 0$ ならば $ax > bx$ であり、$x < 0$ ならば $ax < by$ である。

が、成り立つこと利用して、以下の問いに答えよ。

1. 任意の実数 x に対して、$x^2 \geq 0$ (ただし $x^2 = 0$ なのは $x = 0$ の時)。
2. i を虚数単位 (すなわち、$i^2 = -1$) とすると、i は、実数でない ($i \notin \boldsymbol{R}$ である) ことを示せ。

問題 32　次の不等式を証明せよ。

1. $(ax + by + cz)^2 \leq (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2)$ (シュワルツの不等式)
2. $\sqrt{(a + x)^2 + (b + y)^2 + (c + z)^2} \leq \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)} + \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}$ (三角不等式)

問題 33　複素数 $z = x + yi \quad (y \neq 0)$ に対して、zz' も $z + z'$ も共に実数になるならば、実は、z' は、z の共役複素数 $\bar{z}$ であることを示せ。

問題 34

極形式で記述された二つの複素数 $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1), z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ に対して、$\theta_1 - \theta_2 = n\pi \quad (n \in \boldsymbol{Z})$ の時、この二つの複素数は z_1, z_2 は**平行である** と呼ぶ[1]。

二つの複素数 $z_1, z_2 \quad (z_2 \neq 0)$ が平行であるための必要十分条件は、$\frac{z_1}{z_2}$ が実数の時、即ち、$\frac{z_1}{z_2} = \overline{(\frac{z_1}{z_2})}$ であることを示せ。

問題 35　二次方程式 $x^2 + px + q = 0$ が複素数解 $a + bi \quad (b \neq 0)$ を持つならば、もう一つの解は、$a - bi$ であることを証明せよ。

問題 36

極形式で記述された二つの複素数 $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1), z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ に対して、$\theta_1 - \theta_2 = \pm\frac{\pi}{2} + 2n\pi \quad (n \in \boldsymbol{Z})$ の時、この二つの複素数は z_1, z_2 は**直交する** と呼ぶ[2]。

二つの複素数 $z_1, z_2 \quad (z_2 \neq 0)$ が直交するための必要十分条件は、$\frac{z_1}{z_2}$ が純虚数の時、即ち、$\frac{z_1}{z_2} = -\overline{(\frac{z_1}{z_2})}$ であることを示せ。

---

[1] これは、z_1, z_2 を複素平面上の点 P_1, P_2 に対応させた時に、ベクトル $\overrightarrow{OP_1}, \overrightarrow{OP_2}$ が平行である条件となっている。

[2] これは、z_1, z_2 を複素平面上の点 P_1, P_2 に対応させた時に、ベクトル $\overrightarrow{OP_1}, \overrightarrow{OP_2}$ が直交する条件となっている。

問題 37　複素平面上の点 $P(x, y), A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ とそれに対応する複素数 $z = x + yi, \alpha = x_1 + y_1 i, \beta = x_2 + y_2 i$ について次の問いに答えなさい。

1. 点 A を通り、ベクトル $\overrightarrow{OB}$ に平行な直線 l_1 上の点が P である為の必要十分条件は、それぞれ対応する複素数の間に $\bar{\beta}z - \beta\bar{z} = \bar{\beta}\alpha - \beta\bar{\alpha}$ の関係が成立することであることを証明せよ。

2. 二点 A, B を通る直線 l_2 上の点が P である為の必要十分条件は、それぞれ対応する複素数の間に $(\bar{\beta} - \bar{\alpha})z - (\beta - \alpha)\bar{z} = \bar{\beta}\alpha - \beta\bar{\alpha}$ の関係が成立することであることを証明せよ。

問題 38　複素平面上の点 $P(x, y), A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ とそれに対応する複素数 $z = x + yi, \alpha = x_1 + y_1 i, \beta = x_2 + y_2 i$ について次の問いに答えなさい。

1. 点 A を通り、ベクトル $\overrightarrow{OB}$ に垂直な直線 l_3 上の点が P である為の必要十分条件は、それぞれ対応する複素数の間に $\bar{\beta}z + \beta\bar{z} = \bar{\beta}\alpha + \beta\bar{\alpha}$ の関係が成立することであることを証明せよ。

2. 線分 AB の垂直二等分線 l_4 上の点が P である為の必要十分条件は、それぞれ対応する複素数の間に $(\bar{\beta} - \bar{\alpha})z + (\beta - \alpha)\bar{z} = \bar{\beta}\beta - \alpha\bar{\alpha}$ の関係が成立することであることを証明せよ。

問題 39　点 $P(x, y)$ を原点を中心に θ だけ反時計周りに回転させた点を $Q(x', y')$ とする時、次の問に答えよ。

1. x', y' を、x, y, θ を用いて表せ。

2. $z = x + yi,\ z' = x' + y'i$ とする時に、z' を z, θ を用いて表せ。

3. 上記の関係で、$z' = cz$ となるように、c を θ を用いて表せ。

問題 40

1. 三次方程式 $x^3 + 3px + q = 0$ の根を α, β, γ としたとき、$(\alpha - \beta)^2(\beta - \gamma)^2(\gamma - \alpha)^2$ を p, q の多項式で表わせ。

2. $f(x) = x^3 + 3px + q$ としたとき，$f(x) = 0$ が重根を持つための必要十分条件は $f(x)$ と $f'(x) = 3x^2 + 3p$ が互いに素ではないことを示せ。また，この条件を p, q の多項式を用いて表せ。