代幾 I 演習 (2006/05/10)

問題 41　x^2+1 で割ると $x-1$ 余り、x^2+x+1 で割ると $x+2$ 余るような多項式の内、次数がもっとも小さいものを求めよ。

問題 42　方程式 $x^7-1=0$ の根と係数の関係を用いて、次の等式を証明せよ。

$$1+\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}+\cos\frac{8\pi}{7}+\cos\frac{10\pi}{7}+\cos\frac{12\pi}{7}=0$$

問題 43

1. $\zeta=\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}$ とする。このとき、次の等式を示せ。

$$x^5-1=(x-1)(x-\zeta)(x-\zeta^2)(x-\zeta^3)(x-\zeta^4)$$

2. 自然数 n に対し、$\zeta=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}$ とおく。このとき、次の等式を示せ。

$$x^n-1=(x-1)(x-\zeta)(x-\zeta^2)\cdots(x-\zeta^{n-2})(x-\zeta^{n-1})$$

[**定義**] (整数値多項式) x に関する一変数多項式 $f(x)$ が、「任意の整数 n に対して、$f(n)$ もまた整数になる」場合、「その多項式 $f(x)$ は、**整数値多項式** である」と言う。

問題 44

1. n を整数とすると、$n(n+1)(n+2)(n+3)$ は、常に $4!=24$ で割切れることを示せ[1]。

2. 一般に、x に関する k 次式 $F_k(x)$ を次のように定める。

$$\begin{cases} F_0(x) &= 1 \\ F_{k+1}(x) &= F_k(x)\times\dfrac{(x+k)}{k+1} \qquad (k\geq 0) \end{cases}$$

この時、x が整数ならば、$F_k(x)$ も整数になること、即ち、$F_k(x)$ が整数多項式であることを示せ。

問題 45

1. x に関する n 次の一変数多項式 $f(x)$ が整数値多項式ならば、実は、ある整数 $a_0,a_1,..,a_n$ を適切に選ぶことにより、問題 44 で定義された関数 $F_k(x)$ を用いて、$f(x)=a_0F_0(x)+a_1F_1(x)+\cdots+a_nF_n(x)$ と表せることを示せ。

[1] $n!$ は、負でない整数 n に対して、$n!=1\times 2\times\cdots\times n$ で定義され「n の階乗」と呼ぶ。従って、$4!=4\times 3\times 2\times 1=24$ となる。ただし、$0!=1$ と定める。

2. 上の事実を用い、任意の自然数 n に対して $n^4 - 2n^3 + 11n^2 + 14n$ が、24 の倍数になることを示せ。

問題 46　x に関する n 次多項式 $f(x)$ が整数値多項式になるための必要十分条件は、$k+1$ 個の連続する整数 $i = 0, 1, .., n$ に対して、$f(i)$ が整数になることを示せ (ヒント: $f(x)$ が n 次の多項式ならば、$f(x+1) - f(x)$ の次元が $n-1$ 以下になることを利用し、$f(x)$ の次元に関する帰納法を適用する)。

問題 47

1. x に関する一次関数 $L_0(x), L_1(x)$ を、二つの相異なる実数 x_0, x_1 を用いて、次の様に定義する。

$$\begin{cases} L_0(x) &= \dfrac{x - x_1}{x_0 - x_1} \\ L_1(x) &= \dfrac{x - x_0}{x_1 - x_0} \end{cases}$$

この時、二点 $(x_0, y_0), (x_1, y_1)$ を通る一次関数 $y = f(x)$ は、次のように表すことができることを示せ。

$$y = f(x) = L_0(x)y_0 + L_1(x)y_1 = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1)$$

2. 一般に、$n+1$ の相異なる実数 $x_0, x_1, .., x_n$ に対して、$n+1$ 個の多項式 $L_{n,k}(x)$ を次のように定める。

$$L_{n,k}(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})\cdots(x - x_n)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1)\cdots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\cdots(x_k - x_n)} = \prod_{i=0, i\neq k}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}$$

この時、任意の関数 $f(x)$ に対して次の多項式 $P(x)$ [2]を考える。

$$P(x) = f(x_0)L_{n,0}(x) + f(x_1)L_{n,1}(x) + \cdots + f(x_n)L_{n,n}(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)L_{n,i}$$

すると、実は、$f(x_i) = P(x_i) \quad (i = 0, 1, .., n)$ となることを示せ。

問題 48　多項式 $f(x) = c_0x^n + c_1x^{n-1} + \cdots + c_{n-1}x + c_n$ を考える。相異なる $n+1$ 個の複素数 $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ に対して、$f(a_0) = f(a_1) = \cdots = f(a_n) = 0$ となるならば、$c_0 = c_1 = \cdots = c_n = 0$ であることを証明せよ。

---

[2] この関数を、*Lagrange* **の補間多項式** と呼ぶ。