代幾 I 演習 (2007/05/31)

例題　ここでは対称式 $f(x,y,z)=(x+y)^3+(y+z)^3+(z+x)^3$ を基本対称式の多項式として表わす別の方法を考えることにする。

$f(x,y,z)$ は基本対称式 $s_1=x+y+z$, $s_2=xy+yz+zx$, $s_3=xyz$ の多項式として表わすことができるが $f(x,y,z)$ が 3 次の同次式であることより、

$$f(x,y,z)=as_1^3+bs_1s_2+cs_3$$

と置くことができる。

この式の x,y,z に適当に数を代入してみると $-2c=f(1,1,-2)=6$, $8a+2b=f(1,1,0)=10$, $a-2b=f(2,-1,0)=-1$ が得られる。これより、$a=1$, $b=1$, $c=-3$ となるので、

$$f(x,y,z)=s_1^3+s_1s_2-3s_3$$

となることがわかる。

この方法は交代式を対称式と差積の積で表わすときにも用いることができる。

問題 68　　実数を係数とする n 次方程式 $f(x)=0$ の根を重複度も込めて、$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ とする。このとき、$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ の差積の 2 乗

$$\prod_{i<j}(\alpha_j-\alpha_i)^2=\begin{array}{cccc}(\alpha_2-\alpha_1)^2 & (\alpha_3-\alpha_1)^2 & \cdots & (\alpha_n-\alpha_1)^2\\ & (\alpha_3-\alpha_2)^2 & \cdots & (\alpha_n-\alpha_2)^2\\ & & \cdots & \\ & & & (\alpha_n-\alpha_{n-1})^2\end{array}$$

は実数であることを示せ。

問題 69　　次の交代式を差積と基本対称式で表わせ。

1. $(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3$,
2. $(x-y)^5+(y-z)^5+(z-x)^5$.

問題 70

1. $(x-y)^2$ は x,y についての対称式であることを示せ。
2. ω を $\omega^3=1$ となる $\omega\neq1$ であるような複素数とする。$(x+y+z)(x+\omega y+\omega^2z)(x+\omega^2y+\omega z)$ は x,y,z についての対称式であることを示せ。
3. $(x_1x_2-x_3x_4)(x_1x_3-x_2x_4)(x_1x_4-x_2x_3)$ は x_1,x_2,x_3,x_4 についての対称式であることを示せ。

問題 71　次の対称式を基本対称式の多項式で表わせ。

1. $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$,
2. $x^3 + y^3$,
3. $x^3 + y^3 + z^3$,
4. $x^2(y+z) + y^2(z+x) + z^2(x+y)$.

問題 72　直角三角形 ABC ($\angle C$ を直角とする) に対して、ベクトル $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}$ を、それぞれ $\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ と表すとき、次の問いに答えなさい。

1. 一般に、二つの実ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ に対して、$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2 = |\boldsymbol{a}|^2 + 2(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + |\boldsymbol{b}|^2$ が成立することを示せ。
2. $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$ であることと、$\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$(すなわち $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 0$) を利用して、ピタゴラスの定理 (三平方の定理) を証明しなさい。

問題 73　次の問いに答えなさい。

1. 三つの実ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ に対して、$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{c}$ の交角を θ_1, $\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{c}$ の交角を θ_2 とし、また、$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の長さは等しいとする。この時、$\theta_1 = \theta_2 \Rightarrow (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ を示せ。
2. 二等辺三角形 ABC (ただし、AB = AC とする) に対して、$\angle A$ の角の二等分線と、底辺 BC の交点を P とする時に、実は、P は、底辺 BC を二等分することを、ベクトルの長さと内積を用いて示せ。(ヒント : $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{AB}, \boldsymbol{b} = \overrightarrow{AC}, \boldsymbol{c} = \overrightarrow{AP}$ とすれば、前小問の結果が利用できる。後は、$\overrightarrow{BP} = \boldsymbol{c} - \boldsymbol{a}$ であることを利用すれば...)

問題 74　次の平面幾何学の問題 (内心) を、ベクトルの長さと内積を用いて証明しなさい。

1. 三角形 ABC の各々の角の二等分線の交点が、一点で交わることを示せ。
2. その点が三角形 ABC の内接円の中心であることを示せ。

問題 75　次の平面幾何学の問題 (外心) を、ベクトルの長さと内積を用いて証明しなさい。

1. 三角形 ABC の各々の辺の垂直二等分線の交点が、一点で交わることを示せ。
2. その点が三角形 ABC の外接円の中心であることを示せ。