代幾 I 演習 (2007/06/07)

問題 76　点 U を通り、0 ベクトルでないベクトル $\boldsymbol{a}$ に平行な直線 l と、その直線上にない点 Q から、直線 l への垂線の足を H とした時に、線分 QH の長さが、点 Q と、直線 l の距離になっていることを示せ。(ヒント：直線 l 上の点を P としたとき、Q と l の距離とは、線分 PQ の最小値のことである。)

問題 77　$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ とする。

1. $\boldsymbol{K}^3$ の単位ベクトル $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ をそれぞれ $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ の線型結合で表せ。
2. 上の問の結果を利用して，次のベクトルを $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ の線型結合で表せ。
   (a) $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$,　(b) $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$,　(c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

問題 78　$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ は $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ の線型結合として表すことはできないことを示せ。

問題 79
Text (p.3) の定理 [1.1]、並びに 定理 [1.2] は、図形的に証明を行っている行っているが、空間ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ が、それぞれ以下のような成分を用いて、表現されているとして、これらを成分の計算の立場から証明しなさい。(注意: 何れの定理も三つの等式からなるが、それを全て示すこと)

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

1. 定理 [1.1] が空間ベクトルについて成立することを、成分の計算によって示せ。
2. 定理 [1.2] が空間ベクトルについて成立することを、成分の計算によって示せ。

問題 80　Text (p.6) の定理 [1.3] の内積の性質の内、(7), (8), (9) を、空間ベクトルの成分表示を用いて示せ。

問題 81　次を証明しなさい。

1. ある空間ベクトル $\boldsymbol{z}$ が、任意の空間ベクトル $\boldsymbol{v}$ に対して、$(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{v}) = 0$ を満すならば、実は、$\boldsymbol{z}$ が 0 ベクトルであることを示せ。

2. ある二つの空間ベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ があり、任意の空間ベクトル $\boldsymbol{v}$ に対して、$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{v})$ を満すならば、$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ であることを示せ。

問題 82　空間ベクトルの三つの基本ベクトル

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

を用いて、任意の空間ベクトル

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

は、この三つの基本ベクトルの線型和

$$\boldsymbol{v} = xe_1 + ye_2 + ze_3$$

で表現できることは学んだ (Text p.5) が、この表現が一意であることを示せ。(ヒント：$\boldsymbol{v}$ が $\boldsymbol{v} = x'e_1 + y'e_2 + z'e_3$ の様に、表現できると仮定すると、実は、$x = x', y = y', z = z'$ が成立することを示せばよい)

問題 83　空間ベクトルの三つの基本ベクトル e_1, e_2, e_3 について、次の問いに答えなさい。

1. この基本ベクトルは互いに直交していることを示せ。

2. 任意の空間ベクトル $\boldsymbol{v}$ は、この基本ベクトルと内積を用いて、次のように表現できることを示せ。

$$\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{v}, e_1)e_1 + (\boldsymbol{v}, e_2)e_2 + (\boldsymbol{v}, e_3)e_3$$

問題 84　A を実数を成分とする二行二列 (二次の正方行列)、$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ を二次元 (平面) の縦ベクトル、c を実数とすると、次の線型性が成立することを示しなさい。

$$A(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = (A\boldsymbol{x}) + (A\boldsymbol{y})$$

$$(cA)\boldsymbol{x} = A(c\boldsymbol{x})$$

(ヒント:行列 A 並びに、ベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ を成分表示し、等号の左辺と右辺の結果が同じであることを示せばよい)

問題 85　A, B を $(2, 2)$ 行列とする。

1. $AB = BA$ ならば
$$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2,$$
$$(A+B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$$
となることを証明せよ。

2. $(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$ となるような行列 A, B の例を与えよ。

問題 86　二つの二次の正方行列 A, B に関して、行列間の等号「$A = B$」を、「$\forall \boldsymbol{x} \in V^2$ s.t. $A\boldsymbol{x} = B\boldsymbol{x}$ 」で定義する (つまり、「任意の平面ベクトル $\boldsymbol{x}$ に対して、$A\boldsymbol{x} = B\boldsymbol{x}$ が成立」した時に、「$A = B$」とする)。この時、行列 A, B の成分に関して、次の性質が成り立つことを示しなさい。

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \text{に対して、} A = B \Leftrightarrow \begin{cases} a & = & e \\ b & = & f \\ c & = & g \\ d & = & h \end{cases}$$

(ヒント: 右から左 ($\Leftarrow$) は、単に、$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ を成分表示し、その計算結果を比較すればよい。逆 ($\Rightarrow$) も、同様に行っても良いが、特別なベクトル $\boldsymbol{e}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ に関しても、$A\boldsymbol{e}_0 = B\boldsymbol{e}_0, A\boldsymbol{e}_1 = B\boldsymbol{e}_1$ が成立することを利用した方が簡単になる)

問題 87　互いに直交する 0 でない二つのベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ に対し、それぞれへの射影子を、$P_{\boldsymbol{x}}, P_{\boldsymbol{y}}$ で表すとする。この時、次の等式を証明しなさい。

1. $P_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}, P_{\boldsymbol{y}}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}$
2. $P_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{y} = P_{\boldsymbol{y}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
3. $P_{\boldsymbol{x}} + P_{\boldsymbol{y}} = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
4. $P_{\boldsymbol{x}} \cdot P_{\boldsymbol{y}} = O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(ヒント:この二つのベクトルは、独立なので、任意の平面ベクトル $\boldsymbol{z}$ が、実は、ある実数の組 a, b を用いて、$\boldsymbol{z} = a\boldsymbol{x} + b\boldsymbol{y}$ と表されることを利用すれば...)

問題 88　次を証明せよ。

1. 平面ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ が線型従属ならば、ある $u, v (\in \boldsymbol{R})$ (ただし、u, v のどちらか一方が 0 でない) があり、$u\boldsymbol{a} + v\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ となることを示せ。(ヒント：平面上の原点を通る直線の方程式は $ax + by = 0$ [ただし a, b の内どちらかは 0 でない] として表すことができる。$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ が線型従属ならば、これらを位置ベクトルとする点 A, B の座標が同一直線上にあるので..)

2. 上記の逆を示せ。すなわち、ある $u, v (\in \boldsymbol{R})$ (ただし、u, v のどちらか一方が 0 でない) があり、$u\boldsymbol{a} + v\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ となるならば、平面ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ が線型従属であることを示せ。

問題 89　次を証明せよ。

1. 空間ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ が線型従属ならば、ある $u, v, w (\in \boldsymbol{R})$ (ただし、u, v, w のいずれかの内、少くても一つが 0 でない) があり、$u\boldsymbol{a} + v\boldsymbol{b} + w\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$ となることを示せ。(ヒント：空間内の原点を通る平面の方程式は $ax + by + cz = 0$ [ただし a, b, c の内、いずれか一つは 0 でない] として表すことができるので..)

2. 上記の逆を示せ。すなわち、ある $u, v, w (\in \boldsymbol{R})$ (ただし、u, v, w のいずれかの内、少くても一つが 0 でない) があり、$u\boldsymbol{a} + v\boldsymbol{b} + w\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$ となるならば、平面ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ が線型従属であることを示せ。

[**定義**] 上記の二つの大問の結果を拡張することによって、より一般的に次の形で、$n(> 0)$ 個のベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ に対する線型独立並びに線型従属が次のように定義される (平面ベクトルや、空間ベクトルの性質はこの定義の特殊な場合である)。

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n \text{が線型独立} &\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall c_1, c_2, .., c_n (\in R) s.t. \sum_{i=1}^{n} c_i \boldsymbol{a}_i \neq \boldsymbol{0} \\
&\qquad (\text{ただし、}c_i\text{の少くても一つは0でない}) \\
\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n \text{が線型従属} &\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n \text{が線型独立でない} \\
&\Leftrightarrow \exists c_1, c_2, .., c_n (\in R) s.t. \sum_{i=1}^{n} c_i \boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{0} \\
&\qquad (\text{ただし、}c_i\text{の少くても一つは0でない})
\end{aligned}
$$

問題 90　次を証明せよ。

1. 一つのベクトルが線型従属ならば、そのベクトルは零ベクトルであることを示せ。

2. 三つの平面ベクトルは常に線型従属であることを示せ。

3. 四つの空間ベクトルは常に線型従属であることを示せ。

問題 91

1. 二つの平面ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ が共に、$\mathbf{0}$ ベクトルでなく、また、互いに、直交するならば、この二つのベクトルは線型独立であることを示せ。

2. 三つの空間ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ が、いずれも $\mathbf{0}$ ベクトルでなく、また、どの二つを取っても互いに直交するならば、実は、この三つのベクトルは線型独立であることを示せ。

3. 一般に、$n(>0)$ 個のベクトルに対して、どれも $\mathbf{0}$ ベクトルでなく、しかも、その中の任意の相異なる二つのベクトルが直交するのであれば、この n 個のベクトルは線型独立であることを示せ。

問題 92 　次を証明せよ。

1. $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ の中に同じベクトルが 2 個以上現れるなら $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ は線型従属である。

2. $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ の中に零ベクトル $\mathbf{0}$ が現れるならば、$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ は線型従属である。

問題 93 　n 個ののベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ に対して、その中からどの $n-1$ 個のベクトルを取ってきても線型独立だが、n 個全部だと線型従属になってしまうような組み合わせが存在することを示せ。(ヒント：最初に互いに線型独立な $n-1$ 個の線型独立な $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_{n-1}$ を考え、$\boldsymbol{a}_n$ を、この $n-1$ 個のベクトルの線型結合で表すと...)

問題 94 　$\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ が与えられたとする。$\boldsymbol{b}$ が $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ の線型結合として異なる方法で

$$\begin{aligned} \boldsymbol{b} &= c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{a}_n \\ \boldsymbol{b} &= c_1'\boldsymbol{a}_1 + c_2'\boldsymbol{a}_2 + \cdots + c_n'\boldsymbol{a}_n \end{aligned}$$

と書けたとする (すなわち、$c_i \neq c_i'$ となるような i が少くても一つはある。)。このとき $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ は線型従属であることを示せ。

問題 95 　n 個のベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ が線型独立であれば、その内から $i(0 < i < n)$ 個のベクトルを任意に選んでも、それらが線型独立になることを示せ。(ヒント：前問の結果を利用し、背理法を使えば..)

問題 96 　n 個の $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ に対して、もし、その内の幾つかのベクトルが線型従属になっていたら、全体も線型従属になることを示せ。

問題 97　　二つの空間ベクトルの $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}$ がそれぞれ次のように成分表示されているとする。

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

この時、この二つのベクトルの内積が、成分を用いて、次のようになることは学んだ (Text p.6 の (2) 式)。

$$(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

これを次の事実を用いて導け。

- 空間ベクトルの単位ベクトル e_1, e_2, e_3 に関してだけは、内積を次の様に定義する[1]。

$$(e_i, e_j) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & (i = j \text{ の時}) \\ 0 & (i \neq j \text{ の時}) \end{cases}$$

- 内積の性質 (Text p.6 の定理 [1.3] (7) - (9))。
- 任意の空間ベクトルは、単位ベクトルの線型結合で表すことができる (Text p.5)。

問題 98　　二次元の点を、原点を中心に α だけ反時計回りに回転させる行列を R_α とすると、その行列の成分は、次のようになる。

$$R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

講義の定義では、R_α と R_β の積 ($R_\beta R_\alpha$) を、図形的な意味から $R_{\alpha+\beta}$ で定義した (Text p.16)。

これが、一般的な行列の積の定義と矛盾していないことを示しなさい。

問題 99　　座標平面を原点を中心にして、反時計まわりに θ 回転移動したとき、点 $P(x, y)$ の移る先の点を $P(x', y')$ とする。

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ に $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ を対応させる写像 T は $\boldsymbol{R}^2$ から $\boldsymbol{R}^2$ への線型写像であることを示せ。

[1] この定義に用いられる記号 $\delta_{i,j}$ を**クロネッカーの記号** (Text p.35 参照) と呼ぶ。