代幾 I 演習 (2007/06/14)

問題 100　行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の逆行列 A^{-1} が次の形

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \quad (\text{ただし、} |ad-bc| \neq 0 \text{ の時})$$

で表されているとする。

この時、二つの変数 x, y に関する、次の連立方程式

$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases} \qquad \cdots [1]$$

について、次の問に答えなさい。

1. $AA^{-1} = A^{-1}A = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ であることを示しなさい。
2. 上記の行列 E は、任意のベクトル $\boldsymbol{z}$ に対して、$E\boldsymbol{z} = \boldsymbol{z}$ となることを示しなさい。
3. 行列 A, ベクトル $\boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$ を用いて、上記の連立方程式 [1] を表しなさい。
4. もし、行列 Aが、逆行列を持つ（すなわち、$|ad-bc| \neq 0$ の時）場合、$A^{-1}\boldsymbol{p}$ が、上記の連立方程式 [1] の解となることを示しなさい。
5. 連立方程式

$$\begin{cases} au + bv = 0 \\ cu + dv = 0 \end{cases} \qquad \cdots [2]$$

の解 $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ を考える。すると、もし、$\boldsymbol{z}$ が方程式 [1] の解ならば、$\boldsymbol{z} + \boldsymbol{w}$ も、また方程式 [1] の解になることを示しなさい。

6. 上記の性質を利用して、連立方程式 [1] の解が一つしかないならば、連立方程式 [2] は、$\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 以外の解を持たないことを示しなさい。

問題 101 $\boldsymbol{a}$ を 0 でないベクトルとし、T を、$\boldsymbol{a}$ への射影子とする。この時、0 でない実数 c に対して、$c\boldsymbol{a}$ への射影子を T' とすると、実は、$T' = T$ となることを示せ[1]。

問題 102 $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とおく。

1. $J^2 = -E$ であることを示せ。
2. $a, b, c, d, e, f \in \boldsymbol{R}$ とする。このとき、次を示せ。ただし、i は虚数単位である。

$$(a + bi) + (c + di) = e + fi \ \Leftrightarrow\ (aE + bJ) + (cE + dJ) = eE + fJ,$$

$$(a + bi)(c + di) = e + fi \ \Leftrightarrow\ (aE + bJ)(cE + dJ) = eE + fJ.$$

3. $(4E - 3J)A = E$ となる行列 A を求めよ。
4. $(aE + bJ)(cE + dJ) = (cE + dJ)(aE + bJ)$ であることを示せ。

問題 103 線型空間の公理

1. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (交換法則)
2. $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ (結合法則)
3. $\exists\vec{0}\forall\vec{a}[\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}]$ (零元 [単位元] の存在)
4. $\forall\vec{a}\exists(\vec{-a})[\vec{a} + (\vec{-a}) = (\vec{-a}) + \vec{a} = \vec{0}]$ (逆元の存在)
5. $c(\vec{x} + \vec{y}) = c\vec{x} + c\vec{y}$ (スカラー倍の分配則 I)
6. $(c + d)\vec{x} = c\vec{x} + d\vec{x}$ (スカラー倍の分配則 II)
7. $(cd)\vec{x} = c(d\vec{x})$ (スカラー倍の結合法則)

について、次の問に答えなさい。

1. 零元の性質を満す元は一つしかないことを証明しなさい (零元の uniqueness [ユニークネス:唯一性])。
2. 任意の元 $\vec{x}$ に対して、その 0 倍した元 $0\vec{x}$ は、零元であることを証明しなさい。
3. 任意の元 $\vec{x}$ に対して、その逆元の性質を満す元は、それぞれ一つしかないことを証明しなさい (逆元の uniqueness)。

[1] このことから、射影子で用いられるベクトルは、実は、その大きさには意味がなく、そのベクトルの向きだけが意味を持つということが解る。これは射影子の図形的な意味からも推察される。

問題 104　$M_{2,2}$ を 2 行 2 列の行列全体の集合とする。この時、次の問に答えなさい。

1. 任意の三つの行列 $A, B, C (\in M_{2,2})$ に対して、 $(AB)C = A(BC)$ が成立することを示しなさい。

2. もし、任意の行列 $A \in M_{2,2}$ に対して、$AE_1 = A$ となる行列 E_1 と、$E_2A = A$ となるような行列 E_2 が、共に、$M_{2,2}$ の中に存在すれば、実は、この二つの E_1, E_2 は、同じ行列であることを証明せよ。

3. 任意の行列 $A \in M_{2,2}$ に対して、$AE = EA = A$ となる行列 E ($M_{2,2}$ の単位行列と呼ぶ) を (一つ) 求めなさい。

4. 単位行列の性質を満す要素は $M_{2,2}$ には、一つしかないことを示しなさい。(ヒント: 単位行列の性質 [$AE' = E'A = A$] を満す行列 E' があると、それは、一つ前の問題で求めた行列 E と同じになることを示せばよい。)

5. ある行列 A に対して、$AB = E,\ CA = E$ を満す、行列 B, C が存在すれば、実は、$B = C$ であることを示しなさい。

6. ある行列 A に対して、$AX = XA = E$ を満すような行列 X が、$M_{2,2}$ に存在するときに、その行列 X を 行列 A の逆行列と呼び A^{-1} で表す。もし、行列 A に対して、その逆行列 A^{-1} が存在すれば、それは、一つしかないことを示しなさい。

7. 零行列 $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ には、逆行列が存在しないことを示しなさい。

8. 二つの行列 A, B が共に、逆行列を持つならば、二つの行列の積 AB も逆行列を持つことを示しさい。また、この時、AB の逆行列 $(AB)^{-1}$ を、A, B の逆行列 A^{-1}, B^{-1} を用いて表しなさい。

9. 行列 A が逆行列 A^{-1} をもてば、A を $n (n \in \boldsymbol{N})$ 回掛けあわせた行列 A^n も逆行列を持つことを示しなさい。また、A^n の逆行列 $(A^n)^{-1}$ を A^{-1} (と n) を用いて表しなさい。

問題 105　$M_{2,2}$ を 2 行 2 列の行列全体の集合とする。すなわち、

$$M_{2,2} = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \middle| a_{ij} \in \boldsymbol{R} \right\}$$

とした時、$M_{2,2}$ は、線型空間になっていることを示しなさい。
(ヒント:線型空間の公理 (8 つある) が、全て成立することを示せばよい)

問題 106

複素数全体の集合 $\boldsymbol{C}$ の要素 $\boldsymbol{x} = a + bi, \boldsymbol{y} = c + di$ と 実数 e に関して、普通に和 $(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = (a + c) + (b + d)i)$ と、定数倍 ($e\boldsymbol{x} = (ea) + (eb)i$) を考えると、$\boldsymbol{C}$ 全体は、実数上の線型空間になっていることを確かめなさい。

(ヒント:線型空間の公理 (8 つある) が、全て成立することを示せばよい)

問題 107 $M_{2,2}$ を 2 行 2 列の行列全体の集合とする。この時、次の問に答えなさい。

1. $M_{2,2}$ には、零元の性質を満す元は一つしかないことを証明しなさい (零元の uniqueness [ユニークネス:唯一性])。
2. $M_{2,2}$ の零元を求めなさい。
3. 任意の行列 A に対して、その 0 倍した元 $0A$ は、零元であることを証明しなさい。
4. 任意の行列 A に対して、その逆元は、それぞれ一つしかないことを証明しなさい (逆元の uniquenss)。
5. 行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ の逆元 $-A$ を求めなさい。
6. 任意の行列 A 対して、その (-1) 倍した行列 $(-1)A$ は、その行列の逆元であることを証明しなさい。

問題 108 実数係数の二次式全体の集合を $R_2[x] = \{ax^2 + bx + c | a, b, c \in \boldsymbol{R}\}$ と表すことにする。この時、$R_2[x]$ の二つの要素 $\boldsymbol{f} = f(x) = ax^2 + bx + c, \boldsymbol{g} = g(x) = ux^2 + vx + w$ と、実数 h に対して、普通に、和 $(\boldsymbol{f} + \boldsymbol{g} = (a + u)x^2 + (c + v)x + (c + w))$ と、定数倍 ($h\boldsymbol{f} = (ha)x^2 + (hb)x + (hc)$) を考えるとき、$R_2[x]$ が、実数上の線型空間になっていることを確かめなさい。

(ヒント:線型空間の公理 (8 つある) が、全て成立することを示せばよい)

問題 109 三角関数の和の集合 $F[x] = \{a \cos x + b \sin x | a, b \in \boldsymbol{R}\}$ と表すことにする。この時、$F[x]$ の二つの要素 $\boldsymbol{f} = f(x) = a \cos x + b \sin x, \boldsymbol{g} = g(x) = c \cos x + d \sin x$ と、実数 e に対して、普通に、和 $(\boldsymbol{f} + \boldsymbol{g} = (a+c) \cos x + (b+d) \sin x)$ と、定数倍 ($e\boldsymbol{f} = (ea) \cos x + (eb) \sin x$) を考えるとき、$F[x]$ が、実数上の線型空間になっていることを確かめなさい。

(ヒント:線型空間の公理 (8 つある) が、全て成立することを示せばよい)

問題 110 問題 109 で定義された集合 $F[x]$ に対して、次の問いに答えなさい。

1. $F[x]$ の要素 $f(x) = a \cos x + b \sin x$ に対して、これを x で微分した関数 $f'(x)$ が、再び、$F[x]$ に入ることを示せ。
2. $F[x]$ の要素 $f(x)$ に対して、$f'(x)$ を対応させる変換 D が線型変換であることを示せ。

問題 111　平面ベクトル全体の集合 V^2 上の線型変換全体の集合を $F[V^2]$ とする。$F[V^2]$ の要素 T, S 並びに実数 c に対して、和 $(T+S)$ と定数倍 (cT) を、それぞれ $(T+S)(\boldsymbol{v}) = T(\boldsymbol{v}) + S(\boldsymbol{v})$, $(cT)(\boldsymbol{v}) = c(T(\boldsymbol{v}))$ と定義すると、$F[V^2]$ は線型空間になっていることを示せ。(ヒント:線型空間の公理 (8 つある) が、全て成立することを示せばよい)

問題 112　T, S を V 上の線型変換とする。この時、次の問いに答えなさい。

1. T, S の二つの変換の合成 $S \cdot T$ もまた、V 上の線型変換であることを示せ。
2. T の逆変換 T^{-1} が存在すれば、この逆変換 T^{-1} もまた、V 上の線型変換であることを示せ。

問題 113　平面ベクトル $\boldsymbol{v}$ に対して、それを実数 c 倍した $c\boldsymbol{v}$ を対応させる変換を T_c ($c \in \boldsymbol{R}$) で表すことにする (すなわち $T_c(\boldsymbol{v}) = c\boldsymbol{v}$ となる)。この時、次の問いに答えなさい。

1. $T_3(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix})$ を求めなさい。
2. T_c は、線型変換であることを示しなさい。
3. T_c に対して、$T_c = T_A$ を満すような、二行二列の行列 A を求めなさい。

問題 114　二つの平面ベクトル $\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{q} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ を考える。任意の平面ベクトル $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ に対して、平面ベクトル $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} (\boldsymbol{p}, \boldsymbol{v}) \\ (\boldsymbol{q}, \boldsymbol{v}) \end{pmatrix}$ を対応させる変換 T を考える (ただし、$(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{v}), (\boldsymbol{q}, \boldsymbol{v})$ は、それぞれ $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$ と $\boldsymbol{v}$ の内積である)。この時、次の問いに答えなさい。

1. T は線型変換であることを示しなさい。
2. T に対して、$T = T_A$ を満すような、二行二列の行列 A を求めなさい。

問題 115　原点を通り、x 軸に対して角度 θ で交わる、平面上の直線 $\ell_\theta : y = x \tan\theta$ を考える。この時、次の問いに答えなさい。

1. 平面ベクトル $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を直線 ℓ_θ に対して、線対称となるベクトルを $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ とするとき、x', y' を x, y, θ を用いて表せ。
2. 上記のように平面ベクトル $\boldsymbol{v}$ を $\boldsymbol{u}$ に変換する変換 T に対する行列 A を求めよ。
3. 原点を中心に反時計周りに θ 回転する行列を R_θ、また、x 軸に対して線対称移動を行う行列を M とするとき、上記の A を $M, R_\theta, R_{-\theta}$ を用いて表現せよ (答は結果のみでよい)。

問題 116　平面ベクトル $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ に対して、平面ベクトル $\begin{pmatrix} 2x \\ -3y \end{pmatrix}$ を対応させるような二次元ベクトル上の変換 T に対して、次の問に答えなさい。

1. T は線型変換であることを示しなさい。
2. T に対して、$T = T_A$ を満すような、二行二列の行列 A を求めなさい。ただし、T_A は、任意のベクトル $\boldsymbol{u}$ に対して、$T_A(\boldsymbol{u}) = A\boldsymbol{u}$ と、行列 A を用いて定義された変換の事である。
3. $\boldsymbol{u} = T(\boldsymbol{v})$ に対して、$S(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{v}$ を満すような変換 S を、T の逆変換と呼び T^{-1} で表す。この時、変換 T^{-1} は、ベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ をどのようなベクトルに対応させるか？
4. $T^{-1} = T_B$ を満す行列 B を求めなさい。
5. 行列 A と行列 B はどのような関係になっているか？

問題 117　二つの平面ベクトル $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}$ が独立であるとする。この時、二つの線型変換 T, S に対して、$T\boldsymbol{p} = S\boldsymbol{p},\ T\boldsymbol{q} = S\boldsymbol{q}$ であれば、実は、$T = S$ であることを示せ。

問題 118　二つの平面ベクトル $\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \boldsymbol{q} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ が互いに独立な時、任意の平面ベクトル $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ に対して、ある実数 m, n が存在して、$\boldsymbol{v} = m\boldsymbol{p} + n\boldsymbol{q}$ と表せる。そこで、この m, n の組を改めて、$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$ というベクトルと同一視し、$\boldsymbol{v}$ を $\boldsymbol{u}$ に対応させる変換を T とする時、次の問いに答えなさい。

1. T は線型変換であることを示しなさい。
2. T の逆変換 T^{-1} に対応する行列 B を求めなさい。
3. T に対応する行列 A を求めなさい。

問題 119　次の場合に、点 $\mathrm{A}(a_1, a_2, a_3)$ を通り、ベクトル $\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$ に直交する直線の方程式を求めよ。

1. $d_1 \neq 0,\ d_2 \neq 0,\ d_3 = 0$ のとき。
2. $d_1 \neq 0,\ d_2 = 0,\ d_3 = 0$ のとき。