代幾 I 演習 (2007/06/28)

問題 120　2 行 2 列の行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ が、二つの縦ベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}, \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$ を用いて、$A = (\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})$ と表されている時、次の問に答えなさい。

1. $a_{21} = 0$ ならば、$|A| = a_{11}a_{22}$ であることを示しなさい。
2. 任意の実数 c に対して、$\det(\boldsymbol{x} - c\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}) = |A|$ であることを示しなさい。
3. 2 行 2 列の行列 $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ が、上記のベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ を使って、$B = (\boldsymbol{x} - \frac{a_{21}}{a_{22}}\boldsymbol{y}\ \boldsymbol{y})$ と表されている (ただし、$a_{22} \neq 0$ とする) 時、B の各々の要素 b_{ij} の値を a_{ij} を用いて表しなさい
4. 行列 $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ に対して、$|D| = |C|$ を満たし、$D = \begin{pmatrix} x & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ となるような x を求めなさい。また、この時、$|D|$ と $|C|$ の値をそれぞれ求めなさい。

問題 121　3 行 3 列の行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ が、三つの縦ベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}, \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix}, \boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix}$ を用いて、$A = (\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y},\ \boldsymbol{z})$ と表されている時、次の問に答えなさい。

1. $a_{21} = a_{32} = a_{31} = 0$ ならば、$|A| = a_{11}a_{22}a_{33}$ であることを示しなさい。
2. 任意の実数 c に対して、$\det(\boldsymbol{x} - c\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = |A|$ であることを示しなさい。
3. 3 行 3 列の行列 $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$ が、上記のベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ を使って、$B = (\boldsymbol{x}\ \boldsymbol{y} - \frac{a_{32}}{a_{33}}\boldsymbol{z}\ \boldsymbol{z})$ と表されている (ただし、$a_{33} \neq 0$ とする) 時、B の各々の要素 b_{ij} の値を a_{ij} を用いて表しなさい。
4. 行列 $C = \begin{pmatrix} -4 & -3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ に対して、$|D| = |C|$ を満たし、$D = \begin{pmatrix} u & -\frac{3}{2} & -2 \\ 0 & v & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ となるような u, v を求めなさい (このような、u, v の組は、一組とは限らないが、どれか一つを求めればよい。)。また、この時、$|D|$ と $|C|$ の値をそれぞれ求めなさい。

問題 122　行列 A と $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ が $A\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $A\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $A\boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, を満たすとき $A(-\boldsymbol{x} + 2\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z})$ を求めよ。

問題 123　2 行 2 列の行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ に対して、${}^tA = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$ を行列 A の転置行列と呼ぶ。この時 $|A| = |{}^tA|$ であることを示しなさい。

問題 124　3 行 3 列の行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ に対して、${}^tA = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$ を行列 A の転置行列と呼ぶ。この時 $|A| = |{}^tA|$ であることを示しなさい。

問題 125　行列 A の複素共役行列を、$\overline{A}$ で、表すとする。この時、次の定理を証明せよ。

1. $\overline{\overline{A}} = A$
2. $\overline{A+B} = \overline{A} + \overline{B}$
3. $\overline{cA} = \overline{c}\overline{A}$
4. $\overline{(AB)} = (\overline{A})(\overline{B})$

問題 126　行列 A の転置行列を ${}^tA$, 複素共役行列を、$\overline{A}$ で、表すとする。この時、次の定理を証明せよ。

1. ${}^t({}^tA) = A$
2. ${}^t(\,\overline{A}\,) = \overline{(\,{}^tA)}$
3. ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$
4. ${}^t(cA) = c{}^tA$
5. ${}^t(AB) = {}^tB{}^tA$

問題 127　三次元空間の二つの直線 ℓ_1, ℓ_2 がそれぞれ、点 P_1, P_2（その位置ベクトルは、$\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2$ とする）を通り、ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ に平行である時、この二つの直線の距離を、ベクトル $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ を用いて表せ。