代幾 I 演習 (2007/07/05)

問題 128　A, B, C を (m, n) 行列、c, d を複素数、O を (m, n) 型の零行列とした時に、次の定理を証明しなさい。

1. $A + O = A, \quad A - A = O$
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$
3. $A + B = B + A$
4. $c(A + B) = cA + cB$
5. $(c + d)A = cA + dA$
6. $(cd)A = c(dA)$
7. $1A = A, \quad 0A = O$

問題 129　A, B を (l, m) 行列、C, D を (m, n) 行列、$O_{p,q}$ を (p, q) 型の零行列とする時に、次の定理を証明しなさい。

1. $A(C + D) = AC + AD$
2. $(A + B)C = AC + BC$
3. $AO_{m,n} = O_{l,n}, \quad O_{l,m}C = O_{l,n}$

問題 130　T を 3 次元数ベクトル空間 $\boldsymbol{K}^3$ から 2 次元数ベクトル空間 $\boldsymbol{K}^2$ への線型写像とし、$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ を $\boldsymbol{K}^3$ の標準基底とする。

$$T(\boldsymbol{e}_1) = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix},\ T(\boldsymbol{e}_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ T(\boldsymbol{e}_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

の時、次を計算せよ。

$$(1)\quad T(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}),\ (2)\quad T(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}),\ (3)\quad T(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}).$$

問題 131

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

とした時、$\boldsymbol{K}^n$ の標準基底 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ に対し、$A\boldsymbol{e}_i$ $(1 \leqq i \leqq n)$ を計算し、

$$A = (A\boldsymbol{e}_1\ A\boldsymbol{e}_2\ \cdots A\boldsymbol{e}_n)$$

となることを示せ。

問題 132 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4$ を $\boldsymbol{K}^4$ の標準基底とする。
$A\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $A\boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $A\boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $A\boldsymbol{e}_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ となるような $(2,4)$ 行列 A を求めよ。

問題 133

$$X = \begin{pmatrix} x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y & 1 \\ 0 & 0 & 0 & y \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a \\ b & 1 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

とする。区分けによる計算を用いて X^2, X^3, A^2, A^3, AX, XA を求めよ。

問題 134 A, B, C を n 次正則行列とする。このとき、$(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$ となることを示せ。

問題 135 次の行列 A, B のうち積 AB が可能なものはどれか。またそのとき AB の行の数、列の数はどうなるか。

1. A は $(2,4)$ 行列、B は $(2,3)$ 行列。
2. A は $(2,3)$ 行列、B は $(3,3)$ 行列。
3. A は $(3,1)$ 行列、B は $(3,3)$ 行列。
4. A は $(1,4)$ 行列、B は $(4,2)$ 行列。
5. A は $(3,1)$ 行列、B は $(1,2)$ 行列。
6. A は $(4,2)$ 行列、B は $(4,2)$ 行列。

問題 136　次の条件を満たす行列 A, B の例を作ってみよ。

1. 積 AB は定義できるが BA は定義できない。
2. AB, BA はどちらも定義できるが次数が異なる。
3. AB, BA はどちらも 2 次行列になるが、$AB \neq BA$ となる。
4. AB, BA はどちらも 2 次行列で、$AB = BA$ となる。

問題 137　A を n 次正則行列とする。${}^t(AA^{-1}) = {}^t(A^{-1}A) = {}^tE = E$ を用いて $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$ が成り立つことを示せ。

問題 138　次の計算をせよ。

1. $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 3 & -2 & 6 \end{pmatrix}$,　2. $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$,

3. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$,　4. $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$,

問題 139　$A = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 2 & -4 \end{pmatrix}$ とする。行列の積の結合法則を利用して A^5 を計算せよ。

問題 140

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

の時、次の行列の計算をしなさい。

1. AB,　2. BA　3. A^2,　4. B^2

問題 141

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

の時、次の行列の計算を行いなさい。

1. AB, 2. BA, 3. AC, 4. CA, 5. AD, 6. DA

問題 142 $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ とおく。

1. J^2, J^3, J^4, J^5 を求めよ。

2. 二項定理を利用して $(E+J)^{10}$ を求めよ。

問題 143 次の図の様に、A ～ O の間に道がある時に次の問に答えなさい。

$$\begin{array}{cccccccccccccc}
A & - & - & B & & & C & & & & & & & \\
| & & & | & & & | & & & & & & & \\
| & & & | & & & | & & & & & & & \\
D & - & - & E & - & - & F & - & - & G & & & & \\
 & & & | & & & | & & & | & & & & \\
 & & & | & & & | & & & | & & & & \\
 & & & H & - & - & I & & & | & J & - & - & K \\
 & & & | & & & & & & | & | & & & \\
 & & & | & & & & & & | & | & & & \\
 & & & L & - & - & - & - & - & M & N & - & - & O
\end{array}$$

1. 行列 $X = (x_{\alpha\beta})$ (但し $\alpha = \text{A} \sim \text{O}, \beta = \text{A} \sim \text{O}$) とし、

$$x_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1 & (\alpha \text{ と } \beta \text{ の間に道がある時}) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

と定める時 (例えば、A と B の間には道があるので x_{AB} は 1、A と C の間には道がないので、x_{AC} は 0 となる) の X を求めなさい。

2. $Y = (y_{\alpha\beta}) = X^2$ とした時に、$y_{\alpha\beta}$ の値は、どんな意味を持つか ?

3. D から、丁度 4 回、道を渡った時に到達する (但し、同じ場所や同じ道を何度通っても良いとする) ことができる場所はどことどこか ? また、その時、そこに到る道の種類は全部で何通りか ?