

代幾 I 演習 (2007/10/11)

問題 144

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

の時、 A^n を求めなさい。

問題 145 次の行列の計算をなさい。

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

問題 146

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とした時に次の値を求めなさい。

1. A^2 , 2. A^4 , 3. A^{16} , 4. A^{40}

問題 147 (3,2)-行列 A に対し、5 次行列 B を

$$B = \left(\begin{array}{c|c} E_3 & A \\ \hline O & E_2 \end{array} \right)$$

と定める。ただし、 E_3, E_2 はそれぞれ 3 次と 2 次の単位行列である。

1. $B^2 = \left(\begin{array}{c|c} E_3 & 2A \\ \hline O & E_2 \end{array} \right)$ であることを示せ。

2. B^n を求めよ。

3. B は正則行列であることを示せ。

問題 148 (k, l) 行列 $A, (l, m)$ 行列 $B, (m, n)$ 行列 C に対し、 ${}^t(ABC) = {}^tC {}^tB {}^tA$ となることを示せ。

問題 149 演習書の p.10 の類題 4 を解きなさい。

問題 150 演習書の p.12 の類題 6 を解きなさい。

問題 151 A を n 次行列とする。この時、次の問に答えなさい。

1. A^2 が正則行列ならば、実は、 A 自身も正則行列であることを示せ。

2. A が正則行列ならば、任意の整数 k に対して A^k も正則行列であることを示せ。

問題 152 A, B を次の様な形をした n 次対角行列とする。この時、次の問に答えなさい。

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & b_3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & b_n \end{pmatrix}$$

1. 二つの行列の積 AB を求めなさい。

2. A が逆行列を持つ条件と、 A がその条件を満す時の A の逆行列を求めなさい。

問題 153 n 次行列 A に対して $\text{tr}(A)$ で、 A の固有和 (trace:トレース) を表すとする ($A = \{a_{ij}\}$ の時、 $\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$)。この時、 P が正則行列であれば、 $\text{tr}(P^{-1}AP) = \text{tr}(A)$ であることを示せ。