代幾 I 演習 (2007/11/22)

【群の定義】集合 G の元 a, b に対し、**積**と称する第三の元 (これを ab で表す。また、a, b から ab を求める操作を ***(二項) 演算*** と呼ぶ。) が定まり、次の三つの命題 (この三つの命題を**群の公理** と呼ぶ。) を満すとき、G は (その積を求める演算に関して) **群** (group) であるという (cf. 教科書 p.248 参照)。

1. (結合法則) $\forall a, b, c \in G\,[(ab)c = a(bc)]$
2. (単位元の存在) **単位元** と称する特別な元 e がただ一つ存在して、G の全ての元 a に対して $ae = ea = a$ が成立する 。
3. (逆元の存在) G の任意の元 a に対して、$ax = xa = e$ となるような元 x が存在する。これを a の **逆元** と呼び a^{-1} で表す。

[例題 1] 整数全体 $\boldsymbol{Z}$ は、加法 $(+)$ に関して、群である。
(proof) 以下のようにして、$\boldsymbol{Z}$ 上で、加法は群の三つの公理を全て満すことが解るので、$\boldsymbol{Z}$ は加法に関して群を成す。

1. $\forall a, b, c \in \boldsymbol{Z}$に対して $(a+b)+c = a+(b+c)$ なので、結合法則を満す。
2. $0 \in \boldsymbol{Z}$ であり、$\forall a \in \boldsymbol{Z}$に対して $a+0 = 0+a = a$ なので、0 は $\boldsymbol{Z}$ の加法に対する **単位元** である。
3. $\boldsymbol{Z}$ の任意の要素 a に対して、$x = -a$ とすれば、$x = -a \in \boldsymbol{Z}$ であり、$a+x = a+(-a) = 0, x+a = (-a)+a = 0$ となるので、$x = -a$ は、a の逆元となる。すなわち、$\boldsymbol{Z}$ の任意の要素に対して、逆元が存在する。

[例題 2] 自然数 $\boldsymbol{N}$ は、加法 $(+)$ に関して、群にならない [1] 。
(proof) $\boldsymbol{N}$ の中には、$1+x = 1$ となるような x が存在しない (もし、$1+x = 1$ とすると、$x = 0$ とならなければならないが、0 は $\boldsymbol{N}$ に含まれない)。したがって、単位元が ($\boldsymbol{N}$ の中に..) 存在しない。すなわち、群の公理の二つ目の性質 (単位元の存在) を満さないので、$\boldsymbol{N}$ は、加法 $(+)$ に関して、群にならない。
[例題 3] 自然数 $\boldsymbol{N}$ は、乗法 $(\times)$ に関して、群にならない。
(proof) $\boldsymbol{N}$ の乗法に関する単位元は 1 である (これは $\boldsymbol{N}$ に含まれる) が、$2 \times x = 1$ となる x は $\boldsymbol{N}$ に含まれないので、2 に対する逆元が $\boldsymbol{N}$ に含まれない。すなわち、群の三つ目の公理 (逆元の存在) が成立しないので、$\boldsymbol{N}$ は、乗法に関して群にならない。
[例題 4] 有理数全体の集合 $\boldsymbol{Q}$ から 0 を取り除いた集合を $\boldsymbol{Q}^*(= \boldsymbol{Q} - \{0\})$ とすると、$\boldsymbol{Q}$ は、乗法 $(\times)$ に関して、群になる。
(proof) 以下のようにして、$\boldsymbol{Q}^*$ 上で、乗法は群の三つの公理を全て満すことが解るので、$\boldsymbol{Z}$ は加法に関して群を成す。

[1] ここでは、「自然数」を高校までと同様「正の整数 ($\boldsymbol{N} = \{1, 2, 3, ...\}$)」と考えることにする。ただし、大学の数学では、自然数に 0 を含めるの普通である。

1. $\forall a, b, c \in \boldsymbol{Q}^*$に対して $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$ なので、結合法則を満す。
2. $1 \in \boldsymbol{Q}^*$ であり、 $\forall a \in \boldsymbol{Z}$に対して $a \times 1 = 1 \times a = a$ なので、1 は $\boldsymbol{Q}^*$ の乗法に対する **単位元** である。
3. $\boldsymbol{Q}^*$ の任意の要素 a に対して、$x = 1/a$ とすれば、$x = 1/a \in \boldsymbol{Q}^*$ であり（ $0 \notin \boldsymbol{Q}^*$ であることに注意。)、$a \times x = a \times (1/a) = 1, x \times a = (1/a) \times a = 1$ となるので、$x = 1/a$ は、a の逆元となる。すなわち、$\boldsymbol{Q}^*$ の任意の要素に対して、逆元が存在する。

これらを参考に、次の問題を解きなさい。

問題 161

1. 複素数全体の集合 $\boldsymbol{C}$ は、加法に関して群となることを示せ。
2. 複素数全体の集合 $\boldsymbol{C}$ は、乗法に関して群とならないことを示せ。
3. 複素数全体の集合 $\boldsymbol{C}$ から 0 を取り除いた集合 $\boldsymbol{C}^*(= \boldsymbol{C} - \{0\})$ は、乗法に関して群になることを示せ。

問題 162　複素数全体の集合 $\boldsymbol{C}$ から -2 を取り除いた集合 $\boldsymbol{C}^*(= \boldsymbol{C} - \{-2\})$ 上の演算 $\cdot$ を $x \cdot y = (x+2)(y+2) - 2$ と定義する。ここで、$\boldsymbol{C}^*$ は $\cdot$ に関して群を成すことを示すために、以下の問いに答えよ。

1. 演算 $\cdot$ が結合法則を満す。すなわち $\forall x, y, z \in \boldsymbol{C}^*[(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)]$ であることを示せ。
2. 演算 $\cdot$ の単位元、即ち $\forall x \in \boldsymbol{C}^*[x \cdot e = e \cdot x = x]$ となる e を求めよ。
3. $a(\in C^*)$ の逆元、即ち $a \cdot x = x \cdot a = e$ となる x を a を用いて表せ。

問題 163　K（K は C(複素数) あるいは、R(実数) を考えている。) を成分とする n 次の正方行列全体の集合 $M_{n,n}(K) = \{A | A$ は n 次正方行列$\}$ は、行列の足し算に関して、群になることを示しなさい (ヒント：上記の三つの公理をみたしていることをそれぞれ示せばよい。)。

問題 164　n 次の正方行列全体の集合 $M_{n,n}(K)$ は、行列の掛け算に関して、群になっていないことを示しなさい (ヒント：上記の三つの公理の少くても一つは成立していないので、その成立していない公理を示し、どのような場合に成立していないかを述べればよい。)。

問題 165　n 次の正則行列全体の集合 $GL(n, K) = \{A | A$ は n 次の正方行列で、逆行列を持つ$\}$ は、行列の掛け算に関して、群になることを示しなさい。

問題 166　n 次の正則行列全体の集合 $GL(n,K)$ は、行列の足し算に関して、群になっていないことを示しなさい。

問題 167　n 次のエルミート行列全体の集合 E は、行列の掛け算に関して、群になっていないことを示しなさい。

問題 168　n 次のユニタリ行列全体の集合 U は、行列の掛け算に関して、群になることを示しなさい。

問題 169　n 次のエルミート行列全体の集合 E は、行列の足し算に関して、群になることを示しなさい。

問題 170　n 次のユニタリ行列全体の集合 U は、行列の足し算に関して、群になっていないことを示しなさい。

[対称行列と交代行列]

n 次行列 A が $A={}^tA$ をみたすとき A を対称行列といい、$A=-{}^tA$ をみたすとき A を交代行列という。

問題 171　行列 A が交代行列ならば、A の対角要素は 0 であることを示せ。

問題 172　行列 A が、対称行列かつ交代行列ならば、実は、A は、零行列 O であること示せ。

問題 173

1. 対称行列 A,B の和 $A+B$ も対称行列になることを示しなさい。
2. 交代行列 C,D の和 $C+D$ も交代行列になることを示しなさい。
3. 交代行列 C の二乗 C^2 は、対称行列になることを示しなさい。

問題 174

1. n 次行列 B の (i,j) 成分を b_{ij} $(i,j=1,2,\ldots,n)$ とする。この時、次の行列の (i,j) 成分を求めよ。

$$1.\quad {}^tB,\quad 2.\quad B+{}^tB,\quad 3.\quad B-{}^tB.$$

2. n 次行列 B が与えられたとき $B+{}^tB$ は対称行列であることを示せ。また $B-{}^tB$ は交代行列であることを示せ。

問題 175　正方行列 A は、対称行列と交代行列の和として一意的に表せることを示せ。

問題 176　演習書の p.18 の 1 章の問題の 1.1 を解きなさい。

問題 177　演習書の p.18 の 1 章の問題の 1.2 を解きなさい。

問題 178　A を正則な行列、k, l を整数とする時、次の等式を示しなさい。

1. $A^l A^k = A^{l+k}$
2. $(A^l)^k = A^{lk}$

[行列の冪と冪零[2]]

n 次正方行列 A に対して、A を k 回掛けた結果を A の k 回の**冪 (巾)** と呼び A^k で表す。特に、任意の行列に対して $A^0 = E$ (E は単位行列) と定める[3]。

n 次正方行列 A に対して、ある自然数 $k > 0$ が存在して $A^k = O$(O は零行列) である時、この行列 A は、**冪 (巾) 零行列**と呼ぶ[4]。また、冪零行列 A に対して、k より小さい数では、O にならないが、k で初めて、O になる時、この k を冪零行列 A の**次数**と呼ぶことにする。なお、O (零行列) の次数は 1 であり、逆に、次数が 1 の冪零行列は O のみである。

問題 179

行列 A, B が共に冪零行列で、その次数が、それぞれ k, j とし、$AB = BA$ を満す時、次の問に答えなさい。

1. 二つの行列の積 AB が冪零行列であることを示し、その次数の最大値[5] m を k, j で表しなさい。また、実際に、AB の次数が m になる例と、ならない[6]例をそれぞれ示しなさい。
2. 二つの行列の和 $A + B$ が冪零行列であることを示し、その次数の最大値 m を k, j で表しなさい。また、実際に、$A + B$ の次数が m になる例と、ならない例をそれぞれ示しなさい。

問題 180　次のような n 次の正方行列 $J_n = \{\delta_{i,i-1}\}$ が冪零行列であることを示し、その次数を求めなさい。

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

[2]「冪」、「冪零」は、それぞれ「べき」、「べきれい」と呼ぶ。
[3] $O^0 = E$ であることに注意。
[4] 教科書 p.71 章末問題 6. を参照のこと。
[5] 必ず、$(AB)^m = O$ となる様な m の内、最小の数を求める。次の問いも同様。
[6] m は、次数の最大値なので、m より小さい数で O になってしまう場合があり得る。

問題 181　行列 A が冪零行列ならば、$|A|=0$ を示せ。

問題 182　A が冪零行列の時、e^A を次のように定義する[7]。

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n$$

この時、次の問に答えなさい。

1. $e^O = E$ であることを示しなさい。ただし、O, E はそれぞれ、零行列、単位行列とする。
2. 冪零行列 A, B が、$AB = BA$ を満すならば、e^A と e^B の積 $e^A e^B$ が $e^{(A+B)}$ になることを示しなさい。
3. e^A は正則であることを示しなさい。
4. 正則な行列 Q に対して、$e^{(Q^{-1}AQ)} = Q^{-1}(e^A)Q$ を示しなさい。

問題 183　演習書の p.19 の 1 章の問題の 1.9 を解きなさい。

問題 184　演習書の p.17 の類題 11 を解きなさい。

問題 185　演習書の p.73 の類題 2 を解きなさい。

問題 186　G を平面上の合同変換[8]全体の集合とする。この時、次の問いに答えなさい。

1. $T, S \in G$ (すなわち、T, S が合同変換) の時、T, S の合成 $T \cdot S$ (ここでは $T \cdot S(x) = T(S(x))$ と定義する) もまた、合同変換 (すなわち、$T \cdot S \in G$) であること示せ。
2. 任意の $T, S, U \in G$ に対し、$(T \cdot S) \cdot U = T \cdot (S \cdot U)$ を示せ。なお、この時、教科書 p.63 の定理 [7.1] を利用してよい。
3. 任意の $T \in G$ に対し、$(T \cdot E) = E \cdot T = T$ となる合同変換 E とは何か、言葉で説明しなさい。
4. 任意の $T \in G$ に対して、ある $S \in G$ が存在し、前問の E に対して、$T \cdot S = S \cdot T = E$ となることを示せ。
5. G は、合成 $(\cdot)$ に関して群になることを示せ。

---

[7]形式的には無限和だが、A が冪零なので、実質は有限和であることに注意

[8]教科書 p.68 を参照

問題 187　G を平面上の運動[9]全体の集合とする。この時、G は、変換の合成に関して群になることを示せ。

問題 188　G を平面上の回転[10]全体の集合とする。この時、G は、変換の合成に関して群になることを示せ。

問題 189　G を平面上のアフェイン変換[11]全体の集合とする。この時、G は、変換の合成に関して群になることを示せ。

問題 190　演習書の p.25 の類題 1 を解きなさい。

問題 191　演習書の p.27 の類題 3 を解きなさい。

問題 192　演習書の p.11 の類題 5 を解きなさい。

問題 193　次の行列が逆行列を持つための α の条件を定めよ。またその時の逆行列は何か。

1. $\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 2-\alpha & 3 \end{pmatrix}$　2. $\begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ \alpha & 1 & \alpha \\ 0 & \alpha & 1 \end{pmatrix}$　3. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & \alpha \\ 1 & \alpha & 0 \\ \alpha & 0 & 1 \end{pmatrix}$

問題 194　演習書の p.19 の 1 章の問題の 1.7 を解きなさい。

問題 195　演習書の p.66 の 4 章の問題の 4.1 を解きなさい。

問題 196　n の置換の個数が、$n!$ [12] であることを示せ。

問題 197　n の置換全体の集合は、置換の合成に関して、群[13]になることを示せ。

問題 198　偶置換全体の集合[14]は、置換の合成に関して、群になる[15] ことを示せ。

問題 199　n の置換 σ は次のような互換の積で、一意に表すことができることを示せ。ただし、$p_i > q_i,\ p_i > p_{i+1},\ k < n$ となる。

$$\sigma = (p_1, q_1)(p_2, q_2)..(p_k, q_k)$$

問題 200

1. A が直交行列ならば $\det A = \pm 1$ であることを示せ。
2. A がエルミート行列ならば $\det A$ は実数であることを示せ。
3. A がユニタリ行列ならば $\det A$ は絶対値が 1 の複素数であることを示せ。

---

[9]教科書 p.69 参照
[10]教科書 p.69 参照
[11]教科書 p.70 参照
[12]$n!$ は n の階乗と呼び、$n! = n \times (n-1) \times .. \times 2 \times 1$ である。
[13]この群を「n 次の対称群」と呼び S_n で表します。
[14]偶置換全体は、置換全体の部分集合になっている。このように、ある群の部分集合が、同じ演算に関して、やはり群をなす場合に、この部分集合を「部分群」と呼ぶ。すなわち、偶置換全体の集合は、置換全体の集合の部分群である。
[15]この群を「n 次の交代群」と呼び A_n で表します。