代幾 I 演習 (2007/11/29)

[巡回置換]

6 の置換の内、例えば、

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

は、0 を 3 に、3 を 4 に、そして 4 を 0 に変換している。このように、n の置換の内 $k(\leq n)$ 個の要素を順番に入れ替えるような置換を、**巡回置換**と呼び、その入れ替える要素を並べて表す（上の例では、$(0,3,4)$ と表す）。また、入れ替える要素の個数を巡回置換の長さ（上の例では 3）と呼ぶ。互換は、循環置換の特別な場合（すなわち $k=2$ の場合）と考えることができる。

この時、次の問に答えよ。

問題 201　長さ k 巡回置換 $(a_1, a_2, .., a_k)$ の逆置換が、再び、長さ k の巡回置換になることを示しなさい。また、この時、その逆置換は、どのような形になるか？

問題 202　長さ k の巡回置換の一つを σ とする。この時、置換の集合 $\{\sigma, \sigma^2(=\sigma\sigma), \sigma^3, .., \sigma^k\}$ が群になることを示しなさい。

問題 203　長さ k 巡回置換 $(a_1, a_2, .., a_k)$ が、次のような $k+1$ 個の互換の積で表現できることを示しなさい。

$$(a_1, a_2, .., a_k) = (a_1, a_k)(a_1, a_2)(a_2, a_3)..(a_{k-1}, a_k)(a_1, a_k)$$

問題 204　任意の置換は、巡回置換の積で表現できることを示せ。

問題 205　行列式の定義に従って 4 次の行列式を求めなさい。

問題 206　演習書の p.19 の 1 章の問題の 1.11 を解きなさい。

問題 207　演習書の p.19 の 1 章の問題の 1.12 を解きなさい。

問題 208　$\det {}^tA = A$ と $\det \overline{A} = \overline{\det A}$ を用いて $\det A^* = \overline{\det A}$ を証明せよ。

問題 209　正則行列は基本行列の積で表すことができることと，$|AB| = |A||B|$ を用いて正則行列の行列式は 0 ではないことを示せ。

問題 210　演習書の p.19 の 1 章の問題の 1.13 を解きなさい。

問題 211　演習書の p.19 の 1 章の問題の 1.14 を解きなさい。

問題 212　演習書の p.30 の 類題 6 を解きなさい。

問題 213　次の基本行列の行列式を求めなさい。

1. $P_n(i,j)$,　2. $Q_n(i;c)$,　3. $R_n(i,j,c)$.

問題 214　演習書の p.13 の 1 章の類題 7 を解きなさい。

問題 215　演習書の p.13 の 1 章の類題 8 を解きなさい。

問題 216　冪零行列[1] は正則でないことを示せ。(ヒント：A が正則ならば $|A| \neq 0$ であることと、$|AB| = |A||B|$ を用いよ。)

問題 217　演習書の p.31 の 類題 7 を解きなさい。

問題 218　演習書の p.32 の 類題 8 を解きなさい。

問題 219　直交行列[2]A の行列式 $|A|$ の値を求めよ。(ヒント：$|E| = 1$, $|AB| = |A||B|$ を用いよ。)

問題 220　演習書の p.18 の 1 章の問題 1.3 を解きなさい。

問題 221　演習書の p.18 の 1 章の問題 1.4 を解きなさい。

問題 222　実行列 $X = \begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix}$ に対し、次の行列式を求めよ。

1. $\det X$,　2. $\det(E - X)$.

問題 223　演習書の p.18 の 1 章の問題 1.5 を解きなさい。

問題 224　演習書の p.18 の 1 章の問題 1.6 を解きなさい。

問題 225　次の行列式を因数分解せよ。

1. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$,　2. $\begin{vmatrix} x & i & 1 & -i \\ -i & x & i & 1 \\ 1 & -i & x & i \\ i & 1 & -i & x \end{vmatrix}$

[1] A が冪零行列であることの定義は、ある自然数 n が存在し、$A^n = O$ (ただし、O は零行列) となることである。

[2] A が直交行列であることの定義は、${}^tAA = E$ となることである。