

代幾 I 小テスト [問題] (2007/06/21)

[注意]

- テスト形式ですので「相談は不可」です。私語は慎むように!!。質問がある場合は、黙って、手を上げて、監督者が来るのを待ってください。
- 持ち込みは「なんでも可」です。ただし、トラブルをさけるために、「貸し借り」は不可とします。
- 試験時間は 60 分です。試験終了後、解答を配布しますので、それを見て、「自分で採点」の上、その結果を (当然、名前と学籍番号を記入した上で..) 提出してください。

問題 1 次の二つの多項式の最大公約数を求めなさい。

Q.1

$$x^5 - x^4 - x^3 + 2x - 1, \quad x^3 + x^2 - 1$$

Q.2

$$x^5 - 4x^4 + 7x^3 - 9x^2 + 8x - 6, \quad x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 4x + 3$$

Q.3

$$x^5 - 3x^4 + 4x^3 - x^2 - 2x + 2, \quad x^4 - 2x^3 + x^2 + x - 1$$

問題 2 以下のベクトル a, b, c に対して、次の問に答えなさい。

1. 和 $a + b$ を計算しなさい。
2. ベクトル a の長さ $\|a\|$ を計算しなさい。
3. 内積 (a, b) を計算しなさい。
4. a と b の交角を θ とした時に、その余弦 $\cos \theta$ を求めなさい。
5. c を、 a と b の線型結合で表しなさい。

1.

$$a = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 10 \\ -24 \\ 3 \end{pmatrix}$$

2.

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{c} = \begin{pmatrix} -4 \\ -22 \\ -2 \end{pmatrix}$$

3.

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}, \mathbf{c} = \begin{pmatrix} -23 \\ 3 \\ 27 \end{pmatrix}$$

問題 3 次の点と直線の間の距離を求めなさい

Q.1

$$(-2, 4), \quad 3x + 4y = 1$$

Q.2

$$(5, 4), \quad 4x - 3y = 4$$

Q.3

$$(3, 0), \quad x - 2y = 2$$

問題 4 実数 a, b, c, d についての等式

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2$$

を複素数 α, β についての等式

$$|\alpha| |\beta| = |\alpha\beta|$$

をもちいて導け。

問題 5 複素平面において α と β を表す点の間の距離は $|\beta - \alpha|$ であることを示せ。

問題 6 ドモアブルの公式を用いて、 \cos と \sin の 3 倍角公式を求めよ。

代幾 I 小テスト [解答] (2007/06/21)

問題 1 次の二つの多項式の最大公約数を求めなさい。

A.1

[問題] $x^5 - x^4 - x^3 + 2x - 1, \quad x^3 + x^2 - 1$

[計算] $x^5 - x^4 - x^3 + 2x - 1 = (x^3 + x^2 - 1)(x^2 - 2x + 1) + 0$

[解答] $x^3 + x^2 - 1$

A.2

[問題] $x^5 - 4x^4 + 7x^3 - 9x^2 + 8x - 6, \quad x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 4x + 3$

[計算]
$$\begin{aligned} x^5 - 4x^4 + 7x^3 - 9x^2 + 8x - 6 &= (x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 4x + 3)(x - 1) + (x^3 - 2x^2 + x - 3) \\ x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 4x + 3 &= (x^3 - 2x^2 + x - 3)(x - 1) + 0 \end{aligned}$$

[解答] $x^3 - 2x^2 + x - 3$

A.3

[問題] $x^5 - 3x^4 + 4x^3 - x^2 - 2x + 2, \quad x^4 - 2x^3 + x^2 + x - 1$

[計算]
$$\begin{aligned} x^5 - 3x^4 + 4x^3 - x^2 - 2x + 2 &= (x^4 - 2x^3 + x^2 + x - 1)(x - 1) + (x^3 - x^2 + 1) \\ x^4 - 2x^3 + x^2 + x - 1 &= (x^3 - x^2 + 1)(x - 1) + 0 \end{aligned}$$

[解答] $x^3 - x^2 + 1$

問題 2 以下のベクトル a, b, c に対して、次の問に答えなさい。

1. 和 $a + b$ を計算しなさい。
2. ベクトル a の長さ $\|a\|$ を計算しなさい。
3. 内積 (a, b) を計算しなさい。
4. a と b の交角を θ とした時に、その余弦 $\cos \theta$ を求めなさい。
5. c を、 a と b の線型結合で表しなさい。

1.

1. $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, 2. $\sqrt{13}$, 3. -22 , 4. $-\frac{22\sqrt{533}}{533}$, 5. $2\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}$

2.

1. $\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$, 2. $\sqrt{14}$, 3. 2 , 4. $\frac{\sqrt{21}}{21}$, 5. $5\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} - 7\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

3.

1. $\begin{pmatrix} -1 \\ -9 \\ 3 \end{pmatrix}$, 2. $2\sqrt{22}$, 3. -12 , 4. $-\frac{\sqrt{66}}{33}$, 5. $2\begin{pmatrix} -4 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix} - 5\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}$

問題 3 次の点と直線の間の距離を求めなさい

A.1

$$\frac{9}{5}$$

A.2

$$\frac{4}{5}$$

A.3

$$\frac{\sqrt{5}}{5}$$

問題 4

Q. 実数 a, b, c, d についての等式

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2$$

を複素数 α, β についての等式

$$|\alpha| |\beta| = |\alpha\beta|$$

をもちいて導け。

A. $\alpha = a + bi, \beta = c + di (a, b, c, d \in \mathbf{R})$ とおけば、

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= (\sqrt{a^2 + b^2})^2 (\sqrt{c^2 + d^2})^2 \\ &= |\alpha|^2 |\beta|^2 \\ &= (|\alpha||\beta|)^2 \end{aligned}$$

したがって、仮定より、

$$\begin{aligned} &= (|\alpha\beta|)^2 \\ &= (|(a + bi)(c + di)|)^2 \\ &= (|(ac - bd) + (ad + bc)i|)^2 \\ &= (\sqrt{(ac - bd)^2 + (ad + bc)^2})^2 \\ &= \text{右辺} \end{aligned}$$

よって、

$$\text{左辺} = \text{右辺}$$

したがって、与えられた等式は成立する。

問題 5

Q. 複素平面において α と β を表す点の間の距離は $|\beta - \alpha|$ であることを示せ。

A. $\alpha = a + bi, \beta = c + di (a, b, c, d \in \mathbf{R})$ とおけば、 α, β の表す点は、 $(a, b), (c, d)$ となるので、この二点間の距離は、ピタゴラスの定理から $\sqrt{(c - a)^2 + (d - b)^2}$ である。

したがって、 $|\beta - \alpha| = \sqrt{(c - a)^2 + (d - b)^2}$ を示せばよい。

実際、

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= |\beta - \alpha| \\ &= |(c + di) - (a + bi)| \\ &= |(c - a) + (d - b)i| \\ &= \sqrt{(c - a)^2 + (d - b)^2} \\ &= \text{右辺} \end{aligned}$$

よって、

$$\text{左辺} = \text{右辺}$$

したがって、与えられた等式は成立する。

問題 6

Q. ドモアブルの公式を用いて、 \cos と \sin の 3 倍角公式を求めよ。

A. ドモアブルの公式において $n = 3$ とすれば、次の等式が成立する。

$$\cos 3\theta + i \sin 3\theta = (\cos \theta + i \sin \theta)^3$$

そこで、この等式の左辺を展開して、整理すると、

$$\begin{aligned} \text{与式} &= (\cos \theta + i \sin \theta)^3 \\ &= (\cos \theta)^3 + 3(\cos \theta)^2(i \sin \theta) + 3 \cos \theta (i \sin \theta)^2 + (i \sin \theta)^3 \\ &= \cos^3 \theta + 3i \cos^2 \theta \sin \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta - i \sin^3 \theta \\ &= (\cos^3 \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta) + (3 \cos^2 \theta \sin \theta - \sin^3 \theta)i \\ &= (\cos^3 \theta - 3 \cos \theta(1 - \cos^2 \theta)) + (3(1 - \sin^2 \theta) \sin \theta - \sin^3 \theta)i \\ &= (4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta) + (3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta)i \end{aligned}$$

よって、実部と虚部同士を比較して、

$$\begin{cases} \cos 3\theta &= 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \\ \sin 3\theta &= 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta \end{cases}$$