代幾 I 小テスト [問題] (2007/09/27)

[注意]

- テスト形式ですので「相談は不可」です。私語は慎むように !!。質問がある場合は、黙って、手を上げげて、監督者が来るのを待ってください。
- 持ち込みは「なんでも可」です。ただし、トラブルをさけるために、「貸し借り」は不可とします。
- 試験時間は 60 分です。試験終了後、解答を配布しますので、それをみて、「自分で採点」の上、その結果を (当然、名前と学籍番号を記入した上で..) 提出してください。

問題 1 次の二つの行列 A, B の積 AB を求めなさい

Q.1

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & -3 & 3 \\ 2 & -2 & -2 & 0 \\ -1 & -2 & 3 & -3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ -2 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Q.2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & -3 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -2 \\ 2 & -3 & -1 & -3 \\ -2 & -2 & -2 & 2 \\ -3 & -3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Q.3

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

問題 2 次の二つの空間ベクトル u, v の外積 $u \times v$ を求めなさい

Q.1

$$\mathrm{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathrm{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Q.2

$$\mathrm{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \mathrm{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Q.3

$$\mathrm{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathrm{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

問題 3　次の平面ベクトル v への射影子行列を求めなさい

Q.1

$$\mathrm{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Q.2

$$\mathrm{v} = \begin{pmatrix} 8 \\ 16 \end{pmatrix}$$

Q.3

$$\mathrm{v} = \begin{pmatrix} -9 \\ 6 \end{pmatrix}$$

問題 4

1. 複素数 α が実数であるための必要十分条件は $\alpha = \overline{\alpha}$ であることを示せ。
2. 複素数 $\alpha \neq 0$ が純虚数 (実部が 0 の複素数) であるための必要十分条件は $\alpha = -\overline{\alpha}$ であることを示せ。

問題 5

三次方程式 $x^3 + px + q = 0$ の根を α, β, γ としたとき、$(\alpha - \beta)^2(\beta - \gamma)^2(\gamma - \alpha)^2$ を p, q の多項式で表わせ。

問題 6　$AB = BA$ の時、$(AB)^k = A^k B^k (k \in \boldsymbol{N})$ を示せ。

代幾 I 小テスト [解答] (2007/09/27)

問題 1　次の二つの行列 A, B の積 AB を求めなさい

A.1

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -1 \\ 4 & -2 \\ -3 & -7 \end{pmatrix}$$

A.2

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -11 & 3 \\ 5 & 10 & 9 & -5 \end{pmatrix}$$

A.3

$$AB = \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \end{pmatrix}$$

問題 2　次の二つの空間ベクトル u, v の外積 $u \times v$ を求めなさい

A.1

$$\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

A.2

$$\begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix}$$

A.3

$$\begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

問題 3　次の平面ベクトル v への射影子行列を求めなさい

A.1

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{101} & -\frac{10}{101} \\ -\frac{10}{101} & \frac{100}{101} \end{pmatrix}$$

A.2

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

A.3

$$\begin{pmatrix} \frac{9}{13} & -\frac{6}{13} \\ -\frac{6}{13} & \frac{4}{13} \end{pmatrix}$$

問題 4

1. **Q.** 複素数 α が実数であるための必要十分条件は $\alpha = \overline{\alpha}$ であることを示せ。

   A. $\alpha = a + bi (a, b \in \boldsymbol{R})$ とする。

   ($\Longrightarrow$) α が実数であれば、$b = 0$ となる、従って、$\alpha = a + bi = a + 0i = a$。一方、$\overline{\alpha} = \overline{a + bi} = a - bi = a - 0i = a$。よって、$\alpha = a = \overline{\alpha}$。

   ($\Longleftarrow$) $\alpha = \overline{\alpha}$ より、$a + bi = \overline{a + bi} = a - bi$。これを整理して $2b = 0$ より、$b = 0$。よって、α は実数。

2. **Q.** 複素数 $\alpha \neq 0$ が純虚数 (実部が 0 の複素数) であるための必要十分条件は $\alpha = -\overline{\alpha}$ であることを示せ。

   A. $\alpha = a + bi (a, b \in \boldsymbol{R})$ とする。

   ($\Longrightarrow$) α が純虚数であれば、$a = 0 (b \neq 0)$ となる、従って、$\alpha = a + bi = 0 + bi = bi$。一方、$\overline{\alpha} = \overline{a + bi} = a - bi = 0 - bi = -bi$。よって、$\alpha = bi = -(-bi) = -\overline{\alpha}$。

   ($\Longleftarrow$) $\alpha = \overline{\alpha}$ より、$a + bi = -\overline{a + bi} = -(a - bi) = -a + bi$。これを整理して $2a = 0$ より、$a = 0$。仮定より $b \neq 0$ なので、α は純虚数。

問題 5

Q. 三次方程式 $x^3 + px + q = 0$ の根を α, β, γ としたとき、$(\alpha - \beta)^2(\beta - \gamma)^2(\gamma - \alpha)^2$ を p, q の多項式で表わせ。

A. まず、根と係数の関係より、$\alpha+\beta+\gamma = 0, \beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta = p, \alpha\beta\gamma = -q$ であることに注意する。$(\alpha-\beta)(\beta-\gamma) = -(\beta^2-(\alpha+\gamma)\beta+\alpha\gamma)) = -(\beta^2+\beta^2+\alpha-\beta(\alpha+\gamma)) = -(3\beta^2+p)$ となるので、同様にして、$(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha) = -(3\gamma^2+p), (\gamma-\alpha)(\alpha-\beta) = -(3\alpha^2+p)$ となるので、与式 $= -(3\beta^2+p)(3\gamma^2+p)(3\alpha^2+p) = -(p^3+3p^2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)+9p(\beta^2\alpha^2+\alpha^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2)+27\alpha^2\beta^2\gamma^2) = .. = -(4p^3+27q^2)$ となる。

問題 6

Q. $AB = BA$ の時、$(AB)^k = A^k B^k (k \in \boldsymbol{N})$ を示せ。

A. まず、次の補題を示す。

補題 $AB = BA$ ならば $B^k A = AB^k$ である。

証明 k に関する、帰納法で示す。

(**$k = 1$ の時**) $B^k A = B^1 A = BA = AB = AB^k$ なので示せた。

(**$k = n$ が成立すると仮定して、$k = n+1$ を示す**) $B^k A = B^{n+1} A = B^n BA = B^n AB$。ここで帰納法の仮定より、$B^n A = AB^n$ なので、$B^n AB = AB^n B = AB^{n+1} = AB^k$ となり、示せた。

以上により、任意の $k \in \boldsymbol{N}$ に対して、$B^k A = AB^k$ である。

更に、上記の補題を利用して、k に関する帰納法で示す。

(**$k = 1$ の時**) $(AB)^k = (AB)^1 = AB = A^1 B^1 = A^k B^k$ なので示せた。

(**$k = n$ が成立すると仮定して、$k = n+1$ を示す**) $(AB)^k = (AB)^{n+1} = (AB)^n (AB)$ ここで、帰納法の仮定より、$(AB)^n = A^n B^n$ なので、$(AB)^n (AB) = A^n B^n AB$ ここで、上記の補題より、$B^n A = AB^n$ なので、$A^n B^n AB = A^n AB^n B = A^{n+1} B^{n+1} = A^k B^k$ となり、示せた。

以上により、任意の $k \in \boldsymbol{N}$ に対して、$(AB)^k = A^k B^k$ である。