代幾 I 小テスト [問題] (2007/10/11)

[注意]

- テスト形式ですので「相談は不可」です。私語は慎むように !!。質問がある場合は、黙って、手を上げて、監督者が来るのを待ってください。
- 持ち込みは「なんでも可」です。ただし、トラブルをさけるために、「貸し借り」は不可とします。
- 試験時間は 60 分です。試験終了後、解答を配布しますので、それをみて、「自分で採点」の上、その結果を (当然、名前と学籍番号を記入した上で..) 提出してください。

問題 1　次の空間ベクトル v と垂直な平面への射影子行列を求めなさい

Q.1

$$\mathrm{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Q.2

$$\mathrm{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Q.3

$$\mathrm{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

問題 2　次の行列 A の対角成分 (Trace:トレース) $\mathrm{tr}A$ を求めよ

Q.1

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -7 & -5 & -9 & 1 & 8 \\ -9 & -3 & 9 & -6 & 6 & 6 \\ 9 & 8 & 1 & 6 & 3 & -4 \\ 7 & 5 & -3 & 0 & 6 & 4 \\ 9 & -9 & 2 & -4 & 4 & 9 \\ 6 & 8 & 6 & -6 & 6 & -3 \end{pmatrix}$$

Q.2

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -6 & -6 & 9 \\ 2 & -4 & -1 & 6 & -6 \\ -6 & -9 & -3 & -4 & 3 \\ -3 & 0 & 3 & -5 & -7 \\ -3 & -6 & -1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Q.3

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 5 & 1 \\ 5 & 2 & 5 & 6 \\ 9 & -6 & 5 & -9 \\ 8 & 5 & -6 & 1 \end{pmatrix}$$

問題 3　次の行列の逆行列を求めなさい

Q.1

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Q.2

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Q.3

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

問題 4　行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の逆行列 A^{-1} が次の形

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \quad (\text{ただし、}|ad-bc| \neq 0\text{ の時})$$

で表されているとする。

この時、二つの変数 x, y に関する、次の連立方程式

$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases} \qquad \cdots [1]$$

について、次の問に答えなさい。

1. $AA^{-1} = A^{-1}A = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ であることを示しなさい。
2. 上記の行列 E は、任意のベクトル $\boldsymbol{z}$ に対して、$E\boldsymbol{z} = \boldsymbol{z}$ となることを示しなさい。
3. 行列 A, ベクトル $\boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$ を用いて、上記の連立方程式 [1] を表しなさい。
4. もし、行列 Aが、逆行列を持つ（すなわち、$|ad-bc| \neq 0$ の時）場合、$A^{-1}\boldsymbol{p}$ が、上記の連立方程式 [1] の解となることを示しなさい。
5. 連立方程式

$$\begin{cases} au + bv = 0 \\ cu + dv = 0 \end{cases} \qquad \cdots [2]$$

の解 $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ を考える。すると、もし、$\boldsymbol{z}$ が方程式 [1] の解ならば、$\boldsymbol{z} + \boldsymbol{w}$ も、また方程式 [1] の解になることを示しなさい。

6. 上記の性質を利用して、連立方程式 [1] の解が一つしかないならば、連立方程式 [2] は、$\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 以外の解を持たないことを示しなさい。

問題 5　$\boldsymbol{a}$ を 0 でないベクトルとし、T を、$\boldsymbol{a}$ への射影子とする。この時、0 でない実数 c に対して、$c\boldsymbol{a}$ への射影子を T' とすると、実は、$T' = T$ となることを示せ[1]。

問題 6　T, S を V 上の線型変換とする。この時、次の問いに答えなさい。

1. T, S の二つの変換の合成 $S \cdot T$ もまた、V 上の線型変換であることを示せ。
2. T の逆変換 T^{-1} が存在すれば、この逆変換 T^{-1} もまた、V 上の線型変換であることを示せ。

[1] このことから、射影子で用いられるベクトルは、実は、その大きさには意味がなく、そのベクトルの向きだけが意味を持つということが解る。これは射影子の図形的な意味からも推察される。

代幾 I 小テスト [解答] (2007/10/11)

問題 1　次の空間ベクトル v と垂直な平面への射影子行列を求めなさい

A.1

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

A.2

$$\begin{pmatrix} \frac{9}{10} & -\frac{3}{10} & 0 \\ -\frac{3}{10} & \frac{1}{10} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A.3

$$\begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

問題 2　次の行列 A の対角成分 (Trace:トレース) $\mathrm{tr}A$ を求めよ

A.1

$$-2$$

A.2

$$-4$$

A.3

$$10$$

問題 3　次の行列の逆行列を求めなさい

A.1

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

A.2

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

A.3

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

問題 4

Q. 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の逆行列 A^{-1} が次の形

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \quad (\text{ただし、} |ad - bc| \neq 0 \text{ の時})$$

で表されているとする。

この時、二つの変数 x, y に関する、次の連立方程式

$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases} \qquad \cdots [1]$$

について、次の問に答えなさい。

A.

1. **Q.** $AA^{-1} = A^{-1}A = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ であることを示しなさい。

   A. 行列のかけ算の定義に従って、計算すると、次のようになる。

$$\begin{aligned}
\text{左辺} &= AA^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \left(\tfrac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \right) \\
&= \tfrac{1}{ad-bc} \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \right) \\
&= \tfrac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= E \\
\text{右辺} &= A^{-1}A \\
&= \left(\tfrac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\
&= \tfrac{1}{ad-bc} \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \right) \\
&= \tfrac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= E
\end{aligned}$$

   依って、左辺 $=$ 右辺 $= E$。

2. **Q.** 上記の行列 E は、任意のベクトル $\boldsymbol{z}$ に対して、$E\boldsymbol{z} = \boldsymbol{z}$ となることを示しなさい。

A. 任意のベクトル $\boldsymbol{z}$ を要素を用いて $\boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ として、行列とベクトルのかけ算の定義に従って計算すると、次のようになる。

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= E\boldsymbol{z} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \text{右辺} \end{aligned}$$

よって、成立する。

3. **Q.** 行列 A, ベクトル $\boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$ を用いて、上記の連立方程式 [1] を表しなさい。

A. $A\boldsymbol{z} = \boldsymbol{p}$

4. **Q.** もし、行列 A が、逆行列を持つ(すなわち、$|ad - bc| \neq 0$ の時)場合、$A^{-1}\boldsymbol{p}$ が、上記の連立方程式 [1] の解となることを示しなさい。

A. $A^{-1}\boldsymbol{p}$ が連立方程式の解であれば、前問の $A\boldsymbol{z} = \boldsymbol{p}$ を満すはずである。実際に、$\boldsymbol{z}$ に $A^{-1}\boldsymbol{p}$ を代入すると、

$$\begin{aligned} A\left(A^{-1}\boldsymbol{p}\right) &= \left(AA^{-1}\right)\boldsymbol{p} \\ &= E\boldsymbol{p} \\ &= \boldsymbol{p} \end{aligned}$$

となるので、方程式を満している。

5. **Q.** 連立方程式

$$\begin{cases} au + bv = 0 \\ cu + dv = 0 \end{cases} \qquad \cdots \ [2]$$

の解 $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ を考える。すると、もし、$\boldsymbol{z}$ が方程式 [1] の解ならば、$\boldsymbol{z} + \boldsymbol{w}$ も、また方程式 [1] の解になることを示しなさい。

A. まず、方程式 [2] より $A\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ である。そこで、$\boldsymbol{z} + \boldsymbol{w}$ を方程式 [1] に代入す

ると、

$$\begin{aligned} A(\boldsymbol{z}+\boldsymbol{w}) &= A\boldsymbol{z}+A\boldsymbol{w} \\ &= \boldsymbol{p}+\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \\ &= \boldsymbol{p} \end{aligned}$$

となるので、方程式を満している。

6. **Q.** 上記の性質を利用して、連立方程式 [1] の解が一つしかないならば、連立方程式 [2] は、$\boldsymbol{w}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ 以外の解を持たないことを示しなさい。

   A. 背理法によって証明する。まず、方程式 [1] の解が $\boldsymbol{z}$ 一つだけとし、方程式 [2] が、$\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ 以外の解 $\boldsymbol{w}'\neq\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ を持つと仮定する。すると、$\boldsymbol{z}'=\boldsymbol{z}+\boldsymbol{w}$ とすれば、$\boldsymbol{z}'\neq\boldsymbol{z}$ であるにも拘らず、これは前問題より、$\boldsymbol{z}'$ も方程式 [1] の解となる。これは、方程式 [1] の解が $\boldsymbol{z}$ 一つであることに矛盾する。すなわち、連立方程式 [2] は、$\boldsymbol{w}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ 以外の解を持たない。

問題 5

Q. $\boldsymbol{a}$ を 0 でないベクトルとし、T を、$\boldsymbol{a}$ への射影子とする。この時、0 でない実数 c に対して、$c\boldsymbol{a}$ への射影子を T' とすると、実は、$T'=T$ となることを示せ[2]。

A. $\boldsymbol{a}$ の射影子を、T とすると、定義により $T\boldsymbol{x}=\frac{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{x})}{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})}\boldsymbol{a}$ である。一方、$c\boldsymbol{a}$ の射影子を、T' とすれば、やはり、定義により、$T'\boldsymbol{x}=\frac{(c\boldsymbol{a},\boldsymbol{x})}{(c\boldsymbol{a},c\boldsymbol{a})}(c\boldsymbol{a})$ となる。すなわち、

$$\begin{aligned} T'\boldsymbol{x} &= \tfrac{(c\boldsymbol{a},\boldsymbol{x})}{(c\boldsymbol{a},c\boldsymbol{a})}(c\boldsymbol{a}) \\ &= \tfrac{c(\boldsymbol{a},\boldsymbol{x})}{c^2(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})}(c\boldsymbol{a}) \\ &= \tfrac{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{x})}{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})}(\boldsymbol{a}) \\ &= T\boldsymbol{x} \end{aligned}$$

この等式は、任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ について成立するので、$T=T'$ である。

問題 6

Q. T,S を V 上の線型変換とする。この時、次の問いに答えなさい。

[2]このことから、射影子で用いられるベクトルは、実は、その大きさには意味がなく、そのベクトルの向きだけが意味を持つということが解る。これは射影子の図形的な意味からも推察される。

A.

1. **Q.** T, S の二つの変換の合成 $S \cdot T$ もまた、V 上の線型変換であることを示せ。

   A. 線型性の二つの条件を満すかどうかを調べればよい。実際次のようにそれぞれ満していることが解る。

   定数倍

$$\begin{aligned}(S \cdot T)(c\boldsymbol{x}) &= S(T(c\boldsymbol{x})) \\ &= S(cT\boldsymbol{x}) \\ &= cS(T\boldsymbol{x}) \\ &= c(S(T\boldsymbol{x})) \\ &= c(S \cdot T)\boldsymbol{x}\end{aligned}$$

   和

$$\begin{aligned}(S \cdot T)(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) &= S(T(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})) \\ &= S(T\boldsymbol{x}+T\boldsymbol{y}) \\ &= S(T\boldsymbol{x})+S(T\boldsymbol{y}) \\ &= (S \cdot T)\boldsymbol{x}+(S \cdot T)\boldsymbol{y}\end{aligned}$$

   よって、$(S \cdot T)$ は線型変換。

2. **Q.** T の逆変換 T^{-1} が存在すれば、この逆変換 T^{-1} もまた、V 上の線型変換であることを示せ。

   A. 線型性の二つの条件を満すかどうかを調べればよい。実際次のようにそれぞれ満していることが解る。

   定数倍 まず、T の線型性より $T(c\boldsymbol{x}) = cT\boldsymbol{x}$ である。そこで、$\boldsymbol{z} = T\boldsymbol{x}$ とすれば、$\boldsymbol{x} = T^{-1}\boldsymbol{z}$ となる。従って、上記の式に代入すると、$T(cT^{-1}\boldsymbol{z}) = cTT^{-1}\boldsymbol{z} = c\boldsymbol{z}$ である。この両辺に左から T^{-1} を適用すると、$T^{-1}T(cT^{-1}\boldsymbol{z}) = cT^{-1}\boldsymbol{z} = T^{-1}(c\boldsymbol{z})$ となる。すなわち、$T^{-1}(c\boldsymbol{z}) = cT^{-1}\boldsymbol{z}$ となる。

   和 上記と同様

   よって、T^{-1} は線型変換。