

代幾 I 計算演習 [解答] (2008/07/10)

A.1

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -5 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

前進消去を行います。

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。

左 $Q(1;-1)$; 1 行目を -1 倍

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & -5 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素を要に下の要素を掃き出します。

左 $R(2,1;-4)$; 2 行目に 1 行目を -4 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -1 & 4 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

左 $R(3,1;2)$; 3 行目に 1 行目を 2 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。

左 $Q(2;\frac{1}{7})$; 2 行目を $\frac{1}{7}$ 倍

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{7} & \frac{4}{7} & \frac{1}{7} & 0 \\ 0 & -6 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素を要に下の要素を掃き出します。

左 $R(3,2;6)$; 3 行目に 2 行目を 6 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{7} & \frac{4}{7} & \frac{1}{7} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{7} & \frac{10}{7} & \frac{6}{7} & 1 \end{array} \right)$$

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。

左 $Q(3;7)$; 3 行目を 7 倍

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{7} & \frac{4}{7} & \frac{1}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 10 & 6 & 7 \end{array} \right)$$

後退消去を行います。

2 列目を掃き出します。

左 $R(2,3;\frac{1}{7})$; 2 行目に 3 行目を $\frac{1}{7}$ 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 10 & 6 & 7 \end{array} \right)$$

1 列目を掃き出します。

左 $R(1,2;3)$; 1 行目に 2 行目を 3 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 10 & 6 & 7 \end{array} \right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 10 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

A.2

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -4 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

前進消去を行います。

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。

左 $Q(1; -\frac{1}{4})$; 1 行目を $-\frac{1}{4}$ 倍

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素を要に下の要素を掃き出します。

左 $R(2,1;1)$; 2 行目に 1 行目を 1 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

左 $R(3,1;-2)$; 3 行目に 1 行目を -2 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。

左 $Q(2; \frac{4}{5})$; 2 行目を $\frac{4}{5}$ 倍

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素を要に下の要素を掃き出します。

左 $R(3,2;\frac{1}{2})$; 3 行目に 2 行目を $\frac{1}{2}$ 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & 1 \end{array} \right)$$

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。

左 $Q(3;5)$; 3 行目を 5 倍

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 5 \end{array} \right)$$

後退消去を行います。

2 列目を掃き出します。

左 $R(1,3;\frac{3}{4})$; 1 行目に 3 行目を $\frac{3}{4}$ 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{5}{4} & \frac{3}{2} & \frac{15}{4} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 5 \end{array} \right)$$

左 $R(2,3;\frac{3}{5})$; 2 行目に 3 行目を $\frac{3}{5}$ 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{5}{4} & \frac{3}{2} & \frac{15}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 5 \end{array} \right)$$

1 列目を掃き出します。

左 $R(1,2;-\frac{1}{4})$; 1 行目に 2 行目を $-\frac{1}{4}$ 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 5 \end{array} \right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

A.3

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

前進消去を行います。

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。

左 Q(1;-1) ; 1 行目を -1 倍

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素を要に下の要素を掃き出します。

左 R(2,1;1) ; 2 行目に 1 行目を 1 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

左 R(3,1;-3) ; 3 行目に 1 行目を -3 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。

左 Q(2; $\frac{1}{3}$) ; 2 行目を $\frac{1}{3}$ 倍

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素を要に下の要素を掃き出します。

左 R(3,2;2) ; 3 行目に 2 行目を 2 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{7}{3} & \frac{2}{3} & 1 \end{array} \right)$$

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。

左 Q(3;3) ; 3 行目を 3 倍

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & 2 & 3 \end{array} \right)$$

後退消去を行います。

2 列目を掃き出します。

左 R(1,3;1) ; 1 行目に 3 行目を 1 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 6 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & 2 & 3 \end{array} \right)$$

左 R(2,3; $\frac{1}{3}$) ; 2 行目に 3 行目を $\frac{1}{3}$ 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 6 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & 2 & 3 \end{array} \right)$$

1 列目を掃き出します。

左 R(1,2;-1) ; 1 行目に 2 行目を -1 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & 2 & 3 \end{array} \right)$$

$$A^{-1} = \left(\begin{array}{ccc} 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 7 & 2 & 3 \end{array} \right)$$

A.4

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 7 & -1 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & -3 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

前進消去を行います。

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。

左 $Q(1; \frac{1}{7})$; 1 行目を $\frac{1}{7}$ 倍

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -\frac{1}{7} & 0 & -\frac{3}{7} & \frac{1}{7} & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & -3 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素を要に下の要素を掃き出します。

左 $R(2,1;4)$; 2 行目に 1 行目を 4 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -\frac{1}{7} & 0 & -\frac{3}{7} & \frac{1}{7} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{17}{7} & 0 & -\frac{5}{7} & \frac{4}{7} & 1 & 0 & 0 \\ 6 & -3 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

左 $R(3,1;-6)$; 3 行目に 1 行目を -6 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -\frac{1}{7} & 0 & -\frac{3}{7} & \frac{1}{7} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{17}{7} & 0 & -\frac{5}{7} & \frac{4}{7} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{15}{7} & 1 & \frac{4}{7} & -\frac{6}{7} & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

左 $R(4,1;4)$; 4 行目に 1 行目を 4 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -\frac{1}{7} & 0 & -\frac{3}{7} & \frac{1}{7} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{17}{7} & 0 & -\frac{5}{7} & \frac{4}{7} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{15}{7} & 1 & \frac{4}{7} & -\frac{6}{7} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{4}{7} & -1 & \frac{2}{7} & \frac{4}{7} & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。

左 $Q(2; \frac{7}{17})$; 2 行目を $\frac{7}{17}$ 倍

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -\frac{1}{7} & 0 & -\frac{3}{7} & \frac{1}{7} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{17} & \frac{4}{17} & \frac{7}{17} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{15}{7} & 1 & \frac{4}{7} & -\frac{6}{7} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{4}{7} & -1 & \frac{2}{7} & \frac{4}{7} & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素を要に下の要素を掃き出します。

左 $R(3,2; \frac{15}{7})$; 3 行目に 2 行目を $\frac{15}{7}$ 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -\frac{1}{7} & 0 & -\frac{3}{7} & \frac{1}{7} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{17} & \frac{4}{17} & \frac{7}{17} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{17} & -\frac{6}{17} & \frac{15}{17} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{4}{7} & -1 & \frac{2}{7} & \frac{4}{7} & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

左 $R(4,2; \frac{4}{7})$; 4 行目に 2 行目を $\frac{4}{7}$ 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -\frac{1}{7} & 0 & -\frac{3}{7} & \frac{1}{7} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{17} & \frac{4}{17} & \frac{7}{17} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{17} & -\frac{6}{17} & \frac{15}{17} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \frac{2}{17} & \frac{12}{17} & \frac{4}{17} & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素を要に下の要素を掃き出します。

左 R(4,3;1) ; 4行目に3行目を1倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -\frac{1}{7} & 0 & -\frac{3}{7} & \frac{1}{7} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{17} & \frac{4}{17} & \frac{7}{17} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{17} & -\frac{6}{17} & \frac{15}{17} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{17} & \frac{6}{17} & \frac{19}{17} & 1 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素が1でないので1に正規化します。

左 Q(4;17) ; 4行目を17倍

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -\frac{1}{7} & 0 & -\frac{3}{7} & \frac{1}{7} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{17} & \frac{4}{17} & \frac{7}{17} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{17} & -\frac{6}{17} & \frac{15}{17} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & 19 & 17 & 17 \end{array} \right)$$

後退消去を行います。

3列目を掃き出します。

左 R(1,4; $\frac{3}{7}$) ; 1行目に4行目を $\frac{3}{7}$ 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -\frac{1}{7} & 0 & 0 & \frac{19}{7} & \frac{57}{7} & \frac{51}{7} & \frac{51}{7} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{17} & \frac{4}{17} & \frac{7}{17} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{17} & -\frac{6}{17} & \frac{15}{17} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & 19 & 17 & 17 \end{array} \right)$$

左 R(2,4; $\frac{5}{17}$) ; 2行目に4行目を $\frac{5}{17}$ 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -\frac{1}{7} & 0 & 0 & \frac{19}{7} & \frac{57}{7} & \frac{51}{7} & \frac{51}{7} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 6 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{17} & -\frac{6}{17} & \frac{15}{17} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & 19 & 17 & 17 \end{array} \right)$$

左 R(3,4; $\frac{1}{17}$) ; 3行目に4行目を $\frac{1}{17}$ 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -\frac{1}{7} & 0 & 0 & \frac{19}{7} & \frac{57}{7} & \frac{51}{7} & \frac{51}{7} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 6 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & 19 & 17 & 17 \end{array} \right)$$

1列目を掃き出します。

左 R(1,2; $\frac{1}{7}$) ; 1行目に2行目を $\frac{1}{7}$ 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 9 & 8 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 6 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & 19 & 17 & 17 \end{array} \right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 8 & 8 \\ 2 & 6 & 5 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 6 & 19 & 17 & 17 \end{pmatrix}$$

A.5

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} -2 & -2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

前進消去を行います。

対角要素が1でないので1に正規化します。

左 Q(1; $-\frac{1}{2}$) ; 1行目を $-\frac{1}{2}$ 倍

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素を要に下の要素を掃き出します。

左 R(2,1;-2) ; 2行目に1行目を-2倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

左 R(3,1;-1) ; 3 行目に 1 行目を -1 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素 (2, 2) が 0 なので、0 でない要素を探したところ、(3, 2) に 0 でない要素を見つけましたので、それを対角要素と交換します。

左 P(2,3) ; 2 行目と 3 行目を交換

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。

左 Q(2; $-\frac{1}{2}$) ; 2 行目を $-\frac{1}{2}$ 倍

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素を要に下の要素を掃き出します。

左 R(4,2;-1) ; 4 行目に 2 行目を -1 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \frac{5}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{array} \right)$$

対角要素を要に下の要素を掃き出します。

左 R(4,3;1) ; 4 行目に 3 行目を 1 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{5}{4} & 1 & \frac{1}{2} & 1 \end{array} \right)$$

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。

左 Q(4;4) ; 4 行目を 4 倍

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 4 & 2 & 4 \end{array} \right)$$

後退消去を行います。

3 列目を掃き出します。

左 R(1,4; $\frac{1}{2}$) ; 1 行目に 4 行目を $\frac{1}{2}$ 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 4 & 2 & 4 \end{array} \right)$$

左 R(2,4; $\frac{1}{4}$) ; 2 行目に 4 行目を $\frac{1}{4}$ 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 4 & 2 & 4 \end{array} \right)$$

左 R(3,4;1) ; 3 行目に 4 行目を 1 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 6 & 5 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 4 & 2 & 4 \end{array} \right)$$

1 列目を掃き出します。

左 R(1,2;-1) ; 1 行目に 2 行目を -1 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 6 & 5 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 4 & 2 & 4 \end{array} \right)$$

$$A^{-1} = \left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 6 & 5 & 2 & 4 \\ 5 & 4 & 2 & 4 \end{array} \right)$$

A.6

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

前進消去を行います。

対角要素 (1, 1) が 0 なので、0 でない要素を探したところ、(2, 1) に 0 でない要素を見つけましたので、それを対角要素と交換します。

左 P(1,2) ; 1 行目と 2 行目を交換

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。

左 Q(1;-1/2) ; 1 行目を -1/2 倍

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{5}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素を要に下の要素を掃き出します。

左 R(3,1;-1) ; 3 行目に 1 行目を -1 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{5}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{array} \right)$$

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。

左 Q(2;-1) ; 2 行目を -1 倍

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{5}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{array} \right)$$

対角要素を要に下の要素を掃き出します。

左 R(3,2;-1/2) ; 3 行目に 2 行目を -1/2 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{5}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{array} \right)$$

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。
 左 $Q(3;2)$; 3 行目を 2 倍

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{5}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

後退消去を行います。

2 列目を掃き出します。

左 $R(2,3;1)$; 2 行目に 3 行目を 1 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{5}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

1 列目を掃き出します。

左 $R(1,2;\frac{5}{2})$; 1 行目に 2 行目を $\frac{5}{2}$ 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

左 $R(2,1;1)$; 2 行目に 1 行目を 1 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。

左 $Q(2;\frac{1}{2})$; 2 行目を $\frac{1}{2}$ 倍

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素を要に下の要素を掃き出します。

左 $R(3,2;-1)$; 3 行目に 2 行目を -1 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

左 $R(4,2;1)$; 4 行目に 2 行目を 1 倍して、加える

A.7

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

前進消去を行います。

対角要素を要に下の要素を掃き出します。

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。

左 $Q(3;\frac{2}{5})$; 3 行目を $\frac{2}{5}$ 倍

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素を要に下の要素を掃き出します。

左 $R(4,3;\frac{1}{2})$; 4行目に3行目を $\frac{1}{2}$ 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 1 \end{array} \right)$$

対角要素が1でないので1に正規化します。

左 $Q(4,5)$; 4行目を5倍

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 5 \end{array} \right)$$

後退消去を行います。

3列目を掃き出します。

左 $R(2,4;\frac{1}{2})$; 2行目に4行目を $\frac{1}{2}$ 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 5 \end{array} \right)$$

左 $R(3,4;\frac{3}{5})$; 3行目に4行目を $\frac{3}{5}$ 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 5 \end{array} \right)$$

2列目を掃き出します。

左 $R(2,3;-\frac{1}{2})$; 2行目に3行目を $-\frac{1}{2}$ 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 5 \end{array} \right)$$

1列目を掃き出します。

左 $R(1,2;1)$; 1行目に2行目を1倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 5 \end{array} \right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

A.8

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -1 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

前進消去を行います。

対角要素(1,1)が0なので、0でない要素を探したところ、(2,1)に0でない要素を見つけましたので、それを対角要素と交換します。

左 P(1,2) ; 1 行目と 2 行目を交換

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。

左 Q(2;-1) ; 2 行目を -1 倍

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素を要に下の要素を掃き出します。

左 R(3,2;-1) ; 3 行目に 2 行目を -1 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

後退消去を行います。

2 列目を掃き出します。

左 R(2,3;5) ; 2 行目に 3 行目を 5 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A.9

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -4 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 7 & 7 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

前進消去を行います。

対角要素 (1, 1) が 0 なので、0 でない要素を探したところ、(2, 1) に 0 でない要素を見つけましたので、それを対角要素と交換します。

左 P(1,2) ; 1 行目と 2 行目を交換

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & -4 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 7 & 7 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素を要に下の要素を掃き出します。

左 R(3,1;1) ; 3 行目に 1 行目を 1 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & -4 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

左 R(4,1;1) ; 4 行目に 1 行目を 1 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & -4 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素を要に下の要素を掃き出します。

左 R(3,2;2) ; 3 行目に 2 行目を 2 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & -4 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

左 R(4,2;-1) ; 4行目に2行目を-1倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & -4 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素が1でないので1に正規化します。

左 Q(3;-1) ; 3行目を-1倍

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & -4 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素を要に下の要素を掃き出します。

左 R(4,3;-1) ; 4行目に3行目を-1倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & -4 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

後退消去を行います。

3列目を掃き出します。

左 R(1,4;3) ; 1行目に4行目を3倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & -4 & 0 & 3 & 7 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

左 R(2,4;1) ; 2行目に4行目を1倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & -4 & 0 & 3 & 7 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

左 R(3,4;2) ; 3行目に4行目を2倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & -4 & 0 & 3 & 7 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

2列目を掃き出します。

左 R(1,3;4) ; 1行目に3行目を4倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 3 & 19 & 7 & 11 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

左 R(2,3;2) ; 2行目に3行目を2倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 3 & 19 & 7 & 11 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 8 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

1列目を掃き出します。

左 $R(1,2;-1)$; 1行目に2行目を -1 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 11 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 8 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 11 & 4 & 6 \\ 2 & 8 & 3 & 5 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

A.10

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

前進消去を行います。

対角要素が1でないので1に正規化します。

左 $Q(1;-1)$; 1行目を -1 倍

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素を要に下の要素を掃き出します。

左 $R(3,1;-2)$; 3行目に1行目を -2 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素が1でないので1に正規化します。

左 $Q(2;-1)$; 2行目を -1 倍

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素を要に下の要素を掃き出します。

左 $R(3,2;-1)$; 3行目に2行目を -1 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

後退消去を行います。

2列目を掃き出します。

左 $R(1,3;-1)$; 1行目に3行目を -1 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & -3 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

左 $R(2,3;2)$; 2行目に3行目を2倍して、加える

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & -3 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

1列目を掃き出します。

左 $R(1,2;1)$; 1行目に2行目を1倍して、加える

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

A.11

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} -5 & 3 & -5 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

前進消去を行います。

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。

左 $Q(1; -\frac{1}{5})$; 1 行目を $-\frac{1}{5}$ 倍

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -\frac{3}{5} & 1 & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素を要に下の要素を掃き出します。

左 $R(2, 1; 1)$; 2 行目に 1 行目を 1 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -\frac{3}{5} & 1 & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} & -2 & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

左 $R(3, 1; -3)$; 3 行目に 1 行目を -3 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -\frac{3}{5} & 1 & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} & -2 & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{5} & -2 & \frac{3}{5} & \frac{3}{5} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。

左 $Q(2; \frac{5}{2})$; 2 行目を $\frac{5}{2}$ 倍

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -\frac{3}{5} & 1 & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{5} & -2 & \frac{3}{5} & \frac{3}{5} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素を要に下の要素を掃き出します。

左 $R(3, 2; \frac{1}{5})$; 3 行目に 2 行目を $\frac{1}{5}$ 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -\frac{3}{5} & 1 & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。

左 $Q(3; -\frac{1}{3})$; 3 行目を $-\frac{1}{3}$ 倍

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -\frac{3}{5} & 1 & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素を要に下の要素を掃き出します。

左 $R(4, 3; -1)$; 4 行目に 3 行目を -1 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -\frac{3}{5} & 1 & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 1 \end{array} \right)$$

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。

左 $Q(4; 6)$; 4 行目を 6 倍

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -\frac{3}{5} & 1 & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 6 \end{array} \right)$$

後退消去を行います。

3列目を掃き出します。

左 $R(1,4;\frac{1}{5})$; 1行目に4行目を $\frac{1}{5}$ 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -\frac{3}{5} & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{6}{5} \\ 0 & 1 & -5 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 6 \end{array} \right)$$

左 $R(2,4;\frac{1}{2})$; 2行目に4行目を $\frac{1}{2}$ 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -\frac{3}{5} & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{6}{5} \\ 0 & 1 & -5 & 0 & 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 6 \end{array} \right)$$

左 $R(3,4;\frac{1}{6})$; 3行目に4行目を $\frac{1}{6}$ 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -\frac{3}{5} & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{6}{5} \\ 0 & 1 & -5 & 0 & 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 6 \end{array} \right)$$

2列目を掃き出します。

左 $R(1,3;-1)$; 1行目に3行目を -1 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -\frac{3}{5} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 & -5 & 0 & 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 6 \end{array} \right)$$

左 $R(2,3;5)$; 2行目に3行目を5倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -\frac{3}{5} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 6 \end{array} \right)$$

1列目を掃き出します。

左 $R(1,2;\frac{3}{5})$; 1行目に2行目を $\frac{3}{5}$ 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 6 \end{array} \right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

A.12

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -3 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & 2 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

前進消去を行います。

対角要素を要に下の要素を掃き出します。

左 $R(2,1;2)$; 2行目に1行目を2倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -3 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 6 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & 2 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

左 R(3,1;-3) ; 3 行目に 1 行目を -3 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -3 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 6 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -7 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。

左 Q(2; -1/2) ; 2 行目を -1/2 倍

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -3 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & \frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -7 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素を要に下の要素を掃き出します。

左 R(3,2;-4) ; 3 行目に 2 行目を -4 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -3 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & \frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -2 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

左 R(4,2;-1) ; 4 行目に 2 行目を -1 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -3 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & \frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -2 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。

左 Q(3; 1/5) ; 3 行目を 1/5 倍

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -3 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & \frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素を要に下の要素を掃き出します。

左 R(4,3;1) ; 4 行目に 3 行目を 1 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -3 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & \frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{10} & \frac{6}{5} & \frac{9}{10} & \frac{1}{5} & 1 \end{array} \right)$$

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。

左 Q(4;10) ; 4 行目を 10 倍

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -3 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & \frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 12 & 9 & 2 & 10 \end{array} \right)$$

後退消去を行います。

3 列目を掃き出します。

左 R(1,4;1) ; 1 行目に 4 行目を 1 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -3 & 3 & 0 & 13 & 9 & 2 & 10 \\ 0 & 1 & -3 & \frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 12 & 9 & 2 & 10 \end{array} \right)$$

左 $R(2,4;-\frac{1}{2})$; 2行目に4行目を $-\frac{1}{2}$ 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -3 & 3 & 0 & 13 & 9 & 2 & 10 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & -7 & -5 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 12 & 9 & 2 & 10 \end{array} \right)$$

左 $R(3,4;\frac{2}{5})$; 3行目に4行目を $\frac{2}{5}$ 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -3 & 3 & 0 & 13 & 9 & 2 & 10 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & -7 & -5 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 & 4 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 12 & 9 & 2 & 10 \end{array} \right)$$

2列目を掃き出します。

左 $R(1,3;-3)$; 1行目に3行目を -3 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -3 & 0 & 0 & -2 & -3 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & -7 & -5 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 & 4 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 12 & 9 & 2 & 10 \end{array} \right)$$

左 $R(2,3;3)$; 2行目に3行目を3倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -3 & 0 & 0 & -2 & -3 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 8 & 7 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 & 4 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 12 & 9 & 2 & 10 \end{array} \right)$$

1列目を掃き出します。

左 $R(1,2;3)$; 1行目に2行目を3倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 22 & 18 & 5 & 19 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 8 & 7 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 & 4 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 12 & 9 & 2 & 10 \end{array} \right)$$

$$A^{-1} = \left(\begin{array}{cccc} 22 & 18 & 5 & 19 \\ 8 & 7 & 2 & 7 \\ 5 & 4 & 1 & 4 \\ 12 & 9 & 2 & 10 \end{array} \right)$$