

代幾 I 計算演習 [問題] (2008/10/09)

問. 次の行列の逆行列を求めなさい

Q.1

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 4 & 4 & -3 \\ -3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Q.2

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & 1 \\ -2 & 9 & 2 & -3 \\ 0 & -3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Q.3

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -5 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Q.4

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & -1 \\ 5 & -3 & -9 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 2 \\ -3 & 2 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Q.5

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Q.6

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 & -5 \\ 1 & 4 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Q.7

$$\begin{pmatrix} -3 & -7 & -4 & 6 \\ 1 & 4 & 2 & -3 \\ 0 & -4 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

Q.8

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Q.9

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 2 \\ -3 & 5 & -5 & -1 \\ 4 & -7 & 8 & -1 \\ 2 & -3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Q.10

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -6 & -1 & 4 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Q.11

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Q.12

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -6 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

代幾 I 計算演習 [解答] (2008/10/09)

A.1

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

前進消去を行います。

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。

左 Q(1;-1) ; 1 行目を -1 倍

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素を要に下の要素を掃き出します。

左 R(2,1;-4) ; 2 行目に 1 行目を -4 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

左 R(3,1;3) ; 3 行目に 1 行目を 3 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & -3 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。

左 Q(2;-1/4) ; 2 行目を -1/4 倍

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} & -1 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 5 & -1 & -3 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素を要に下の要素を掃き出します。

左 R(3,2;-5) ; 3 行目に 2 行目を -5 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} & -1 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 2 & \frac{5}{4} & 1 \end{array} \right)$$

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。

左 Q(3;4) ; 3 行目を 4 倍

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} & -1 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 8 & 5 & 4 \end{array} \right)$$

後退消去を行います。

2 列目を掃き出します。

左 R(1,3;1) ; 1 行目に 3 行目を 1 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 7 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} & -1 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 8 & 5 & 4 \end{array} \right)$$

左 R(2,3;1/4) ; 2 行目に 3 行目を 1/4 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 7 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 8 & 5 & 4 \end{array} \right)$$

1 列目を掃き出します。

左 R(1,2;-2) ; 1 行目に 2 行目を -2 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 8 & 5 & 4 \end{array} \right)$$

$$A^{-1} = \left(\begin{array}{ccc} 5 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 8 & 5 & 4 \end{array} \right)$$

左 R(4,2;3) ; 4 行目に 2 行目を 3 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -3 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 15 & -4 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -11 & 3 & 0 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。

左 Q(3; $\frac{1}{15}$) ; 3 行目を $\frac{1}{15}$ 倍

A.2

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -3 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 9 & 2 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

前進消去を行います。

対角要素を要に下の要素を掃き出します。

左 R(3,1;2) ; 3 行目に 1 行目を 2 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -3 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素を要に下の要素を掃き出します。

左 R(3,2;-3) ; 3 行目に 2 行目を -3 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -3 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 15 & -4 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -3 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{15} & \frac{2}{15} & -\frac{1}{5} & \frac{1}{15} & 0 \\ 0 & 0 & -11 & 3 & 0 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素を要に下の要素を掃き出します。

左 R(4,3;11) ; 4 行目に 3 行目を 11 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -3 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{15} & \frac{2}{15} & -\frac{1}{5} & \frac{1}{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{15} & \frac{22}{15} & \frac{4}{5} & \frac{11}{15} & 1 \end{array} \right)$$

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。

左 Q(4;15) ; 4 行目を 15 倍

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -3 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{15} & \frac{2}{15} & -\frac{1}{5} & \frac{1}{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 22 & 12 & 11 & 15 \end{array} \right)$$

後退消去を行います。

3 列目を掃き出します。

左 R(1,4;-1) ; 1 行目に 4 行目を -1 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -3 & -1 & 0 & -21 & -12 & -11 & -15 \\ 0 & 1 & -5 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{15} & \frac{2}{15} & -\frac{1}{5} & \frac{1}{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 22 & 12 & 11 & 15 \end{array} \right)$$

左 R(2,4;-1) ; 2行目に4行目を-1倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -3 & -1 & 0 & -21 & -12 & -11 & -15 \\ 0 & 1 & -5 & 0 & -22 & -11 & -11 & -15 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{15} & \frac{2}{15} & -\frac{1}{5} & \frac{1}{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 22 & 12 & 11 & 15 \end{array} \right)$$

左 R(3,4; $\frac{4}{15}$) ; 3行目に4行目を $\frac{4}{15}$ 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -3 & -1 & 0 & -21 & -12 & -11 & -15 \\ 0 & 1 & -5 & 0 & -22 & -11 & -11 & -15 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 6 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 22 & 12 & 11 & 15 \end{array} \right)$$

2列目を掃き出します。

左 R(1,3;1) ; 1行目に3行目を1倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -3 & 0 & 0 & -15 & -9 & -8 & -11 \\ 0 & 1 & -5 & 0 & -22 & -11 & -11 & -15 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 6 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 22 & 12 & 11 & 15 \end{array} \right)$$

左 R(2,3;5) ; 2行目に3行目を5倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -3 & 0 & 0 & -15 & -9 & -8 & -11 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 8 & 4 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 6 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 22 & 12 & 11 & 15 \end{array} \right)$$

1列目を掃き出します。

左 R(1,2;3) ; 1行目に2行目を3倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 9 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 8 & 4 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 6 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 22 & 12 & 11 & 15 \end{array} \right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 9 & 3 & 4 & 4 \\ 8 & 4 & 4 & 5 \\ 6 & 3 & 3 & 4 \\ 22 & 12 & 11 & 15 \end{pmatrix}$$

A.3

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

前進消去を行います。

対角要素(1,1)が0なので、0でない要素を探したところ、(2,1)に0でない要素を見つけましたので、それを対角要素と交換します。

左 P(1,2) ; 1行目と2行目を交換

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -5 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素が1でないので1に正規化します。

左 Q(1; $-\frac{1}{5}$) ; 1行目を $-\frac{1}{5}$ 倍

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & 0 & -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素を要に下の要素を掃き出します。

左 $R(3,1;-3)$; 3行目に1行目を -3 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & 0 & -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} & 0 & \frac{3}{5} & 1 \end{array} \right)$$

対角要素を要に下の要素を掃き出します。

左 $R(3,2;\frac{3}{5})$; 3行目に2行目を $\frac{3}{5}$ 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & 0 & -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & \frac{3}{5} & 1 \end{array} \right)$$

対角要素が1でないので1に正規化します。

左 $Q(3,5)$; 3行目を5倍

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & 0 & -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 3 & 5 \end{array} \right)$$

後退消去を行います。

2列目を掃き出します。

左 $R(1,3;\frac{2}{5})$; 1行目に3行目を $\frac{2}{5}$ 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{5} & 0 & \frac{6}{5} & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 3 & 5 \end{array} \right)$$

1列目を掃き出します。

左 $R(1,2;-\frac{1}{5})$; 1行目に2行目を $-\frac{1}{5}$ 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 3 & 5 \end{array} \right)$$

$$A^{-1} = \left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 5 \end{array} \right)$$

A.4

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & -3 & -9 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

前進消去を行います。

対角要素が1でないので1に正規化します。

左 $Q(1;\frac{1}{2})$; 1行目を $\frac{1}{2}$ 倍

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 5 & -3 & -9 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素を要に下の要素を掃き出します。

左 $R(2,1;-5)$; 2行目に1行目を -5 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{13}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{5}{2} & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

左 $R(3,1;1)$; 3行目に1行目を1倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{13}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{5}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

左 R(4,1;3) ; 4 行目に 1 行目を 3 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{13}{2} & -\frac{5}{2} & -\frac{5}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。

左 Q(2;-2) ; 2 行目を -2 倍

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 13 & -5 & 5 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素を要に下の要素を掃き出します。

左 R(3,2;1/2) ; 3 行目に 2 行目を 1/2 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 13 & -5 & 5 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

左 R(4,2;-1/2) ; 4 行目に 2 行目を -1/2 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 13 & -5 & 5 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。

左 Q(3;1/4) ; 3 行目を 1/4 倍

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 13 & -5 & 5 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素を要に下の要素を掃き出します。

左 R(4,3;3) ; 4 行目に 3 行目を 3 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 13 & -5 & 5 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{5}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 1 \end{array} \right)$$

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。

左 Q(4;4) ; 4 行目を 4 倍

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 13 & -5 & 5 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 1 & 3 & 4 \end{array} \right)$$

後退消去を行います。

3 列目を掃き出します。

左 R(1,4;1/2) ; 1 行目に 4 行目を 1/2 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 3 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 1 & 13 & -5 & 5 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 1 & 3 & 4 \end{array} \right)$$

左 R(2,4;5) ; 2 行目に 4 行目を 5 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 3 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 1 & 13 & 0 & 30 & 3 & 15 & 20 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 1 & 3 & 4 \end{array} \right)$$

左 $R(3,4;\frac{1}{4})$; 3行目に4行目を $\frac{1}{4}$ 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 3 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 1 & 13 & 0 & 30 & 3 & 15 & 20 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 1 & 3 & 4 \end{array} \right)$$

2列目を掃き出します。

左 $R(1,3;\frac{1}{2})$; 1行目に3行目を $\frac{1}{2}$ 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 4 & \frac{1}{2} & 2 & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & 13 & 0 & 30 & 3 & 15 & 20 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 1 & 3 & 4 \end{array} \right)$$

左 $R(2,3;-13)$; 2行目に3行目を -13 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 4 & \frac{1}{2} & 2 & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 3 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 1 & 3 & 4 \end{array} \right)$$

1列目を掃き出します。

左 $R(1,2;\frac{1}{2})$; 1行目に2行目を $\frac{1}{2}$ 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 6 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 3 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 1 & 3 & 4 \end{array} \right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 & 6 \\ 4 & 3 & 2 & 7 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

A.5

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

前進消去を行います。

対角要素(1,1)が0なので、0でない要素を探したところ、(2,1)に0でない要素を見つけましたので、それを対角要素と交換します。

左 $P(1,2)$; 1行目と2行目を交換

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -3 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素を要に下の要素を掃き出します。

左 $R(3,1;2)$; 3行目に1行目を2倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -3 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 6 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素(2,2)が0なので、0でない要素を探したところ、(3,2)に0でない要素を

みつけたので、それを対角要素と交換します。

左 P(2,3) ; 2行目と3行目を交換

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -3 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 6 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素が1でないので1に正規化します。

左 Q(2; -1/6) ; 2行目を -1/6 倍

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -3 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{1}{6} & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素を要に下の要素を掃き出します。

左 R(4,2;-1) ; 4行目に2行目を -1 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -3 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{1}{6} & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & 1 \end{array} \right)$$

対角要素を要に下の要素を掃き出します。

左 R(4,3;1) ; 4行目に3行目を1倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -3 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{1}{6} & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & 1 \end{array} \right)$$

対角要素が1でないので1に正規化します。

左 Q(4;6) ; 4行目を6倍

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -3 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{1}{6} & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & 2 & 1 & 6 \end{array} \right)$$

後退消去を行います。

3列目を掃き出します。

左 R(2,4;1/6) ; 2行目に4行目を1/6倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -3 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & 2 & 1 & 6 \end{array} \right)$$

2列目を掃き出します。

左 R(1,3;-4) ; 1行目に3行目を -4 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -3 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & 2 & 1 & 6 \end{array} \right)$$

左 R(2,3;1) ; 2行目に3行目を1倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -3 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & 2 & 1 & 6 \end{array} \right)$$

1列目を掃き出します。

左 R(1,2;3) ; 1行目に2行目を3倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & 2 & 1 & 6 \end{array} \right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

A.6

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 5 & 6 & -5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

前進消去を行います。

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。

左 $Q(1; \frac{1}{2})$; 1 行目を $\frac{1}{2}$ 倍

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & \frac{5}{2} & 3 & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素を要に下の要素を掃き出します。

左 $R(2,1;-1)$; 2 行目に 1 行目を -1 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & \frac{5}{2} & 3 & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

左 $R(3,1;1)$; 3 行目に 1 行目を 1 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & \frac{5}{2} & 3 & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 4 & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。

左 $Q(2; \frac{2}{3})$; 2 行目を $\frac{2}{3}$ 倍

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & \frac{5}{2} & 3 & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 4 & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素を要に下の要素を掃き出します。

左 $R(3,2;-\frac{1}{2})$; 3 行目に 2 行目を $-\frac{1}{2}$ 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & \frac{5}{2} & 3 & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{13}{3} & -\frac{8}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

左 $R(4,2;1)$; 4 行目に 2 行目を 1 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & \frac{5}{2} & 3 & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{13}{3} & -\frac{8}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{11}{3} & \frac{7}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。

左 $Q(3; \frac{3}{13})$; 3 行目を $\frac{3}{13}$ 倍

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & \frac{5}{2} & 3 & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{8}{13} & \frac{2}{13} & -\frac{1}{13} & \frac{3}{13} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{11}{3} & \frac{7}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素を要に下の要素を掃き出します。

左 $R(4,3;\frac{11}{3})$; 4行目に3行目を $\frac{11}{3}$ 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & \frac{5}{2} & 3 & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{8}{13} & \frac{2}{13} & -\frac{1}{13} & \frac{3}{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{13} & \frac{3}{13} & \frac{5}{13} & \frac{11}{13} & 1 \end{array} \right)$$

対角要素が1でないので1に正規化します。

左 $Q(4;13)$; 4行目を13倍

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & \frac{5}{2} & 3 & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{8}{13} & \frac{2}{13} & -\frac{1}{13} & \frac{3}{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 5 & 11 & 13 \end{array} \right)$$

後退消去を行います。

3列目を掃き出します。

左 $R(1,4;\frac{5}{2})$; 1行目に4行目を $\frac{5}{2}$ 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & \frac{5}{2} & 3 & 0 & 8 & \frac{25}{2} & \frac{55}{2} & \frac{65}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{8}{13} & \frac{2}{13} & -\frac{1}{13} & \frac{3}{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 5 & 11 & 13 \end{array} \right)$$

左 $R(2,4;-\frac{1}{3})$; 2行目に4行目を $-\frac{1}{3}$ 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & \frac{5}{2} & 3 & 0 & 8 & \frac{25}{2} & \frac{55}{2} & \frac{65}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & 0 & -\frac{4}{3} & -1 & -\frac{11}{3} & -\frac{13}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{8}{13} & \frac{2}{13} & -\frac{1}{13} & \frac{3}{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 5 & 11 & 13 \end{array} \right)$$

左 $R(3,4;\frac{8}{13})$; 3行目に4行目を $\frac{8}{13}$ 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & \frac{5}{2} & 3 & 0 & 8 & \frac{25}{2} & \frac{55}{2} & \frac{65}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & 0 & -\frac{4}{3} & -1 & -\frac{11}{3} & -\frac{13}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 3 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 5 & 11 & 13 \end{array} \right)$$

2列目を掃き出します。

左 $R(1,3;-3)$; 1行目に3行目を -3 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & \frac{5}{2} & 0 & 0 & 2 & \frac{7}{2} & \frac{13}{2} & \frac{17}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & 0 & -\frac{4}{3} & -1 & -\frac{11}{3} & -\frac{13}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 3 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 5 & 11 & 13 \end{array} \right)$$

左 $R(2,3;\frac{2}{3})$; 2行目に3行目を $\frac{2}{3}$ 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & \frac{5}{2} & 0 & 0 & 2 & \frac{7}{2} & \frac{13}{2} & \frac{17}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 3 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 5 & 11 & 13 \end{array} \right)$$

1列目を掃き出します。

左 $R(1,2;-\frac{5}{2})$; 1行目に2行目を $-\frac{5}{2}$ 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 3 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 5 & 11 & 13 \end{array} \right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 7 & 8 \\ 3 & 5 & 11 & 13 \end{pmatrix}$$

A.7

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} -3 & -7 & -4 & 6 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

前進消去を行います。

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。

左 $Q(1; -\frac{1}{3})$; 1 行目を $-\frac{1}{3}$ 倍

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & \frac{7}{3} & \frac{4}{3} & -2 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素を要に下の要素を掃き出します。

左 $R(2,1;-1)$; 2 行目に 1 行目を -1 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & \frac{7}{3} & \frac{4}{3} & -2 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{3} & \frac{2}{3} & -1 & \frac{1}{3} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

左 $R(4,1;-2)$; 4 行目に 1 行目を -2 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & \frac{7}{3} & \frac{4}{3} & -2 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{3} & \frac{2}{3} & -1 & \frac{1}{3} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。

左 $Q(2; \frac{3}{5})$; 2 行目を $\frac{3}{5}$ 倍

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & \frac{7}{3} & \frac{4}{3} & -2 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素を要に下の要素を掃き出します。

左 $R(3,2;4)$; 3 行目に 2 行目を 4 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & \frac{7}{3} & \frac{4}{3} & -2 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & \frac{12}{5} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

左 $R(4,2;\frac{2}{3})$; 4 行目に 2 行目を $\frac{2}{3}$ 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & \frac{7}{3} & \frac{4}{3} & -2 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & \frac{12}{5} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{4}{5} & \frac{2}{5} & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。

左 $Q(3; -\frac{5}{2})$; 3 行目を $-\frac{5}{2}$ 倍

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & \frac{7}{3} & \frac{4}{3} & -2 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -2 & -6 & -\frac{5}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{4}{5} & \frac{2}{5} & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素を要に下の要素を掃き出します。

左 $R(4,3;-\frac{3}{5})$; 4 行目に 3 行目を $-\frac{3}{5}$ 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & \frac{7}{3} & \frac{4}{3} & -2 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -2 & -6 & -\frac{5}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 2 & 4 & \frac{3}{2} & 1 \end{array} \right)$$

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。

左 $Q(4;2)$; 4 行目を 2 倍

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & \frac{7}{3} & \frac{4}{3} & -2 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -2 & -6 & -\frac{5}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 8 & 3 & 2 \end{array} \right)$$

後退消去を行います。

3 列目を掃き出します。

左 $R(1,4;2)$; 1 行目に 4 行目を 2 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & \frac{7}{3} & \frac{4}{3} & 0 & \frac{23}{3} & 16 & 6 & 4 \\ 0 & 1 & \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -2 & -6 & -\frac{5}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 8 & 3 & 2 \end{array} \right)$$

左 $R(2,4;\frac{3}{5})$; 2 行目に 4 行目を $\frac{3}{5}$ 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & \frac{7}{3} & \frac{4}{3} & 0 & \frac{23}{3} & 16 & 6 & 4 \\ 0 & 1 & \frac{2}{5} & 0 & \frac{13}{5} & \frac{27}{5} & \frac{9}{5} & \frac{6}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -2 & -6 & -\frac{5}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 8 & 3 & 2 \end{array} \right)$$

左 $R(3,4;\frac{3}{2})$; 3 行目に 4 行目を $\frac{3}{2}$ 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & \frac{7}{3} & \frac{4}{3} & 0 & \frac{23}{3} & 16 & 6 & 4 \\ 0 & 1 & \frac{2}{5} & 0 & \frac{13}{5} & \frac{27}{5} & \frac{9}{5} & \frac{6}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 6 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 8 & 3 & 2 \end{array} \right)$$

2 列目を掃き出します。

左 $R(1,3;-\frac{4}{3})$; 1 行目に 3 行目を $-\frac{4}{3}$ 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & \frac{7}{3} & 0 & 0 & \frac{7}{3} & 8 & \frac{10}{3} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{5} & 0 & \frac{13}{5} & \frac{27}{5} & \frac{9}{5} & \frac{6}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 6 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 8 & 3 & 2 \end{array} \right)$$

左 $R(2,3;-\frac{2}{5})$; 2 行目に 3 行目を $-\frac{2}{5}$ 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & \frac{7}{3} & 0 & 0 & \frac{7}{3} & 8 & \frac{10}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 6 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 8 & 3 & 2 \end{array} \right)$$

1 列目を掃き出します。

左 $R(1,2;-\frac{7}{3})$; 1 行目に 2 行目を $-\frac{7}{3}$ 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 6 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 8 & 3 & 2 \end{array} \right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 6 & 2 & 3 \\ 4 & 8 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

A.8

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

前進消去を行います。

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。

左 $Q(1;\frac{1}{3})$; 1 行目を $\frac{1}{3}$ 倍

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{4}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素を要に下の要素を掃き出します。

左 R(2,1;2) ; 2行目に1行目を2倍して、加える

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{4}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

左 R(3,1;1) ; 3行目に1行目を1倍して、加える

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{4}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{3} & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素が1でないので1に正規化します。

左 Q(2;3) ; 2行目を3倍

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{4}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{3} & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素を要に下の要素を掃き出します。

左 R(3,2; $\frac{1}{3}$) ; 3行目に2行目を $\frac{1}{3}$ 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{4}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

後退消去を行います。

1列目を掃き出します。

左 R(1,2; $\frac{4}{3}$) ; 1行目に2行目を $\frac{4}{3}$ 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

A.9

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 5 & -5 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -7 & 8 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

前進消去を行います。

対角要素が1でないので1に正規化します。

左 Q(1;-1) ; 1行目を-1倍

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 1 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 5 & -5 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -7 & 8 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素を要に下の要素を掃き出します。

左 R(2,1;3) ; 2行目に1行目を3倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 1 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -7 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -7 & 8 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

左 R(3,1;-4) ; 3行目に1行目を-4倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 1 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -7 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 4 & 7 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

左 R(4,1;-2) ; 4 行目に 1 行目を -2 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 1 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -7 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 4 & 7 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 4 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。

左 Q(2;1/2) ; 2 行目を 1/2 倍

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 1 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{7}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 4 & 7 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 4 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素を要に下の要素を掃き出します。

左 R(3,2;3) ; 3 行目に 2 行目を 3 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 1 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{7}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 4 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

左 R(4,2;1) ; 4 行目に 2 行目を 1 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 1 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{7}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。

左 Q(4;2) ; 4 行目を 2 倍

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 1 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{7}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{array} \right)$$

後退消去を行います。

3 列目を掃き出します。

左 R(1,4;2) ; 1 行目に 4 行目を 2 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{7}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{array} \right)$$

左 R(2,4;7/2) ; 2 行目に 4 行目を 7/2 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 & 4 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{array} \right)$$

左 R(3,4;7/2) ; 3 行目に 4 行目を 7/2 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 & 4 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 5 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{array} \right)$$

2 列目を掃き出します。

左 $R(1,3;-1)$; 1 行目に 3 行目を -1 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 0 & 0 & -2 & -3 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 & 4 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 5 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{array} \right)$$

左 $R(2,3;1)$; 2 行目に 3 行目を 1 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 0 & 0 & -2 & -3 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 5 & 9 & 1 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 5 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{array} \right)$$

1 列目を掃き出します。

左 $R(1,2;1)$; 1 行目に 2 行目を 1 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 6 & 0 & 11 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 5 & 9 & 1 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 5 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{array} \right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 & 11 \\ 5 & 9 & 1 & 14 \\ 3 & 5 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

A.10

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -6 & -1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

前進消去を行います。

対角要素を要に下の要素を掃き出します。

左 $R(2,1;6)$; 2 行目に 1 行目を 6 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 6 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

左 $R(3,1;-4)$; 3 行目に 1 行目を -4 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -4 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。

左 $Q(2;-1)$; 2 行目を -1 倍

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -6 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -4 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素を要に下の要素を掃き出します。

左 $R(3,2;-1)$; 3 行目に 2 行目を -1 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -6 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

後退消去を行います。

2 列目を掃き出します。

左 $R(2,3;4)$; 2 行目に 3 行目を 4 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

A.11

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & -1 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

前進消去を行います。

対角要素 (1, 1) が 0 なので、0 でない要素を探したところ、(2, 1) に 0 でない要素を見つけましたので、それを対角要素と交換します。

左 P(1,2) ; 1 行目と 2 行目を交換

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。

左 Q(1;-1) ; 1 行目を -1 倍

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & -2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素を要に下の要素を掃き出します。

左 R(4,1;-2) ; 4 行目に 1 行目を -2 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & -2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。

左 Q(2;-1) ; 2 行目を -1 倍

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & -2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素を要に下の要素を掃き出します。

左 R(4,2;-1) ; 4 行目に 2 行目を -1 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & -2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -2 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。

左 Q(3;-1/2) ; 3 行目を -1/2 倍

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & -2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -2 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素を要に下の要素を掃き出します。

左 R(4,3;-5) ; 4 行目に 3 行目を -5 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & -2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & 2 & \frac{5}{2} & 1 \end{array} \right)$$

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。

左 Q(4;2) ; 4行目を2倍

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & -2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & 5 & 2 \end{array} \right)$$

後退消去を行います。

3列目を掃き出します。

左 R(2,4;-1) ; 2行目に4行目を-1倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & -2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & -3 & -4 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & 5 & 2 \end{array} \right)$$

左 R(3,4;\frac{1}{2}) ; 3行目に4行目を\frac{1}{2}倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & -2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & -3 & -4 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & 5 & 2 \end{array} \right)$$

2列目を掃き出します。

左 R(1,3;2) ; 1行目に3行目を2倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 2 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & -3 & -4 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & 5 & 2 \end{array} \right)$$

左 R(2,3;3) ; 2行目に3行目を3倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 2 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & 5 & 2 \end{array} \right)$$

1列目を掃き出します。

左 R(1,2;1) ; 1行目に2行目を1倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 5 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & 5 & 2 \end{array} \right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 5 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

A.12

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

前進消去を行います。

対角要素が1でないので1に正規化します。

左 Q(1;-1) ; 1行目を-1倍

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -3 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素を要に下の要素を掃き出します。

左 R(2,1;-3) ; 2行目に1行目を-3倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -3 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & -1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

左 R(3,1;1) ; 3 行目に 1 行目を 1 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -3 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & -1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。

左 Q(2;1/10) ; 2 行目を 1/10 倍

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -3 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{10} & 0 & \frac{3}{10} & \frac{1}{10} & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素を要に下の要素を掃き出します。

左 R(3,2;3) ; 3 行目に 2 行目を 3 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -3 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{10} & 0 & \frac{3}{10} & \frac{1}{10} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{10} & 1 & -\frac{1}{10} & \frac{3}{10} & 1 & 0 \\ 0 & -6 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

左 R(4,2;6) ; 4 行目に 2 行目を 6 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -3 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{10} & 0 & \frac{3}{10} & \frac{1}{10} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{10} & 1 & -\frac{1}{10} & \frac{3}{10} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{5} & -1 & \frac{9}{5} & \frac{3}{5} & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。

左 Q(3;-10/3) ; 3 行目を -10/3 倍

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -3 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{10} & 0 & \frac{3}{10} & \frac{1}{10} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{10}{3} & \frac{1}{3} & -1 & -\frac{10}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{5} & -1 & \frac{9}{5} & \frac{3}{5} & 0 & 1 \end{array} \right)$$

対角要素を要に下の要素を掃き出します。

左 R(4,3;-2/5) ; 4 行目に 3 行目を -2/5 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -3 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{10} & 0 & \frac{3}{10} & \frac{1}{10} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{10}{3} & \frac{1}{3} & -1 & -\frac{10}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{5}{3} & 1 & \frac{4}{3} & 1 \end{array} \right)$$

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。

左 Q(4;3) ; 4 行目を 3 倍

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -3 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{10} & 0 & \frac{3}{10} & \frac{1}{10} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{10}{3} & \frac{1}{3} & -1 & -\frac{10}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 3 & 4 & 3 \end{array} \right)$$

後退消去を行います。

3 列目を掃き出します。

左 R(3,4;10/3) ; 3 行目に 4 行目を 10/3 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -3 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{10} & 0 & \frac{3}{10} & \frac{1}{10} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 17 & 9 & 10 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 3 & 4 & 3 \end{array} \right)$$

2列目を掃き出します。

左 $R(2,3;\frac{1}{10})$; 2行目に3行目を $\frac{1}{10}$ 倍して、加える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -3 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 17 & 9 & 10 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 3 & 4 & 3 \end{array} \right)$$

1列目を掃き出します。

左 $R(1,2;3)$; 1行目に2行目を3倍して、加

える

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 17 & 9 & 10 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 3 & 4 & 3 \end{array} \right)$$

$$A^{-1} = \left(\begin{array}{cccc} 5 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 17 & 9 & 10 & 10 \\ 5 & 3 & 4 & 3 \end{array} \right)$$