

代幾 I 計算演習 [問題] (2008/10/09)

問. 次の行列の階数 (Rank) を求めよ

Q.1

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & -3 & 0 \\ 5 & -2 & -3 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

Q.7

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Q.2

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Q.8

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 & 3 \\ -5 & 5 & -1 & -4 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 6 & -6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Q.3

$$\begin{pmatrix} 6 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -7 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Q.9

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ -7 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Q.4

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & 0 & 3 & 2 \\ -1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Q.10

$$\begin{pmatrix} -2 & 4 & -4 & 6 & -2 \\ 2 & -8 & 7 & -8 & 4 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Q.5

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Q.11

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 6 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

Q.6

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Q.12

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

代幾 I 計算演習 [解答] (2008/10/09)

A.1

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & -3 & 0 \\ 5 & -2 & -3 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

対角要素をかなめに他の要素を掃き出します。
列を掃き出します。

左 R(2,1;2) ; 2行目に1行目を2倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & -2 & -3 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

左 R(3,1;-5) ; 3行目に1行目を-5倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

行を掃き出します。

右 R(1,2;1) ; 2列目に1列目を1倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

右 R(1,4;-2) ; 4列目に1列目を-2倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

対角要素が1でないので1に正規化します。

左 Q(2;-1) ; 2行目を-1倍

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

対角要素をかなめに他の要素を掃き出します。
列を掃き出します。

左 R(3,2;-3) ; 3行目に2行目を-3倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

行を掃き出します。

右 R(2,3;1) ; 3列目に2列目を1倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

右 R(2,4;1) ; 4列目に2列目を1倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

rank = 2

A.2

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

対角要素 (1, 1) が 0 なので、0 でない要素を探したところ、(1, 3) に 0 でない要素を見つけましたので、それを対角要素と交換します。

右 P(1,3) ; 1 列目と 3 列目を交換

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

対角要素をかなめに他の要素を掃き出します。列を掃き出します。

左 R(2,1;2) ; 2 行目に 1 行目を 2 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

左 R(3,1;1) ; 3 行目に 1 行目を 1 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

rank = 1

A.3

$$\begin{pmatrix} 6 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -7 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。

左 Q(1; $\frac{1}{6}$) ; 1 行目を $\frac{1}{6}$ 倍

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 \\ -7 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

対角要素をかなめに他の要素を掃き出します。

列を掃き出します。

左 R(3,1;7) ; 3 行目に 1 行目を 7 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{7}{6} \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

左 R(5,1;3) ; 5 行目に 1 行目を 3 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{7}{6} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

行を掃き出します。

右 R(1,2; $\frac{1}{2}$) ; 2 列目に 1 列目を $\frac{1}{2}$ 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{7}{6} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

右 $R(1,3;\frac{1}{6})$; 3 列目に 1 列目を $\frac{1}{6}$ 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{7}{6} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

対角要素 (2, 2) が 0 なので、0 でない要素を探したところ、(3, 2) に 0 でない要素を見つけましたので、それを対角要素と交換します。

左 $P(2,3)$; 2 行目と 3 行目を交換

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{7}{6} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。

左 $Q(2;2)$; 2 行目を 2 倍

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

対角要素をかなめに他の要素を掃き出します。
列を掃き出します。

左 $R(5,2;\frac{1}{2})$; 5 行目に 2 行目を $\frac{1}{2}$ 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

行を掃き出します。

右 $R(2,3;\frac{7}{3})$; 3 列目に 2 列目を $\frac{7}{3}$ 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

対角要素 (3, 3) が 0 なので、0 でない要素を探したところ、(5, 3) に 0 でない要素を見つけましたので、それを対角要素と交換します。

左 $P(3,5)$; 3 行目と 5 行目を交換

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。

左 $Q(3;3)$; 3 行目を 3 倍

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

rank = 3

A.4

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & 0 & 3 & 2 \\ -1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

対角要素 (1, 1) が 0 なので、0 でない要素を探したところ、(1, 2) に 0 でない要素を見つけましたので、それを対角要素と交換します。

右 P(1,2) ; 1 列目と 2 列目を交換

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ -3 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ -2 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。

左 Q(1;1/2) ; 1 行目を 1/2 倍

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -1 \\ -3 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ -2 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

対角要素をかなめに他の要素を掃き出します。列を掃き出します。

左 R(2,1;3) ; 2 行目に 1 行目を 3 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & -1 \\ -2 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

左 R(3,1;2) ; 3 行目に 1 行目を 2 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

左 R(4,1;-1) ; 4 行目に 1 行目を -1 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{5}{2} & 3 \end{pmatrix}$$

行を掃き出します。

右 R(1,4;1/2) ; 4 列目に 1 列目を 1/2 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{5}{2} & 3 \end{pmatrix}$$

右 R(1,5;1) ; 5 列目に 1 列目を 1 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{5}{2} & 3 \end{pmatrix}$$

対角要素 (2, 2) が 0 なので、0 でない要素を探したところ、(2, 4) に 0 でない要素を見つけましたので、それを対角要素と交換します。

右 P(2,4) ; 2 列目と 4 列目を交換

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -\frac{5}{2} & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。

左 Q(2; $\frac{2}{3}$) ; 2 行目を $\frac{2}{3}$ 倍

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -\frac{5}{2} & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

対角要素をかなめに他の要素を掃き出します。
列を掃き出します。

左 R(4,2; $\frac{5}{2}$) ; 4 行目に 2 行目を $\frac{5}{2}$ 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

行を掃き出します。

右 R(2,5; $\frac{2}{3}$) ; 5 列目に 2 列目を $\frac{2}{3}$ 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

対角要素をかなめに他の要素を掃き出します。
列を掃き出します。

左 R(4,3;1) ; 4 行目に 3 行目を 1 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

行を掃き出します。

右 R(3,4;1) ; 4 列目に 3 列目を 1 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

右 R(3,5;1) ; 5 列目に 3 列目を 1 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

対角要素 (4, 4) が 0 なので、0 でない要素を探したところ、(4, 5) に 0 でない要素を

みつけたので、それを対角要素と交換します。

右 P(4,5) ; 4 列目と 5 列目を交換

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。

左 Q(4,3) ; 4 行目を 3 倍

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

rank = 4

A.5

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

対角要素 (1, 1) が 0 なので、0 でない要素を探したところ、(2, 1) に 0 でない要素をみつけたので、それを対角要素と交換します。

左 P(1,2) ; 1 行目と 2 行目を交換

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。

左 Q(1;-1) ; 1 行目を -1 倍

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

対角要素をかなめに他の要素を掃き出します。列を掃き出します。

左 R(4,1;-1) ; 4 行目に 1 行目を -1 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

行を掃き出します。

右 R(1,2;3) ; 2 列目に 1 列目を 3 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

右 R(1,3;-2) ; 3 列目に 1 列目を -2 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

対角要素 (2, 2) が 0 なので、0 でない要素を探したところ、(4, 2) に 0 でない要素をみつけたので、それを対角要素と交換します。

左 P(2,4) ; 2行目と4行目を交換

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

対角要素をかなめに他の要素を掃き出します。
行を掃き出します。

右 R(2,3;2) ; 3列目に2列目を2倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

rank = 2

A.6

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

対角要素 (1, 1) が 0 なので、0でない要素を探したところ、(4, 1) に 0でない要素を見つけましたので、それを対角要素と交換します。

左 P(1,4) ; 1行目と4行目を交換

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。

左 Q(1; $\frac{1}{3}$) ; 1行目を $\frac{1}{3}$ 倍

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

対角要素をかなめに他の要素を掃き出します。
行を掃き出します。

右 R(1,3; $\frac{2}{3}$) ; 3列目に1列目を $\frac{2}{3}$ 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

rank = 1

A.7

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。

左 Q(1;-1) ; 1行目を -1 倍

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

対角要素をかなめに他の要素を掃き出します。
列を掃き出します。

左 $R(3,1;-1)$; 3 行目に 1 行目を -1 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

行を掃き出します。

右 $R(1,2;2)$; 2 列目に 1 列目を 2 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

対角要素 $(2, 2)$ が 0 なので、0 でない要素を探したところ、 $(3, 2)$ に 0 でない要素を見つけましたので、それを対角要素と交換します。

左 $P(2,3)$; 2 行目と 3 行目を交換

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

rank = 2

A.8

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 & 3 \\ -5 & 5 & -1 & -4 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 6 & -6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。

左 $Q(1;\frac{1}{3})$; 1 行目を $\frac{1}{3}$ 倍

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -5 & 5 & -1 & -4 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 6 & -6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

対角要素をかなめに他の要素を掃き出します。
列を掃き出します。

左 $R(2,1;5)$; 2 行目に 1 行目を 5 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 6 & -6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

左 $R(3,1;-1)$; 3 行目に 1 行目を -1 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & -6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

左 $R(4,1;-6)$; 4 行目に 1 行目を -6 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

行を掃き出します。

右 $R(1,2;1)$; 2 列目に 1 列目を 1 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

右 R(1,4;-1) ; 4 列目に 1 列目を -1 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

対角要素 (2, 2) が 0 なので、0 でない要素を探したところ、(2, 3) に 0 でない要素を見つけましたので、それを対角要素と交換します。

右 P(2,3) ; 2 列目と 3 列目を交換

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。

左 Q(2;-1) ; 2 行目を -1 倍

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

対角要素をかなめに他の要素を掃き出します。
列を掃き出します。

左 R(4,2;-2) ; 4 行目に 2 行目を -2 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

行を掃き出します。

右 R(2,4;1) ; 4 列目に 2 列目を 1 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

rank = 2

A.9

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ -7 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。

左 Q(1;1/5) ; 1 行目を 1/5 倍

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{5} & 0 & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ -7 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

対角要素をかなめに他の要素を掃き出します。
列を掃き出します。

左 R(3,1;-2) ; 3 行目に 1 行目を -2 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{5} & 0 & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{5} & 2 & -\frac{3}{5} \\ -7 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

左 R(4,1;7) ; 4 行目に 1 行目を 7 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{5} & 0 & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{5} & 2 & -\frac{3}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} & 1 & -\frac{7}{5} \end{pmatrix}$$

行を掃き出します。

右 R(1,2; $\frac{2}{5}$) ; 2 列目に 1 列目を $\frac{2}{5}$ 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{5} & 2 & -\frac{3}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} & 1 & -\frac{7}{5} \end{pmatrix}$$

右 R(1,4; $\frac{1}{5}$) ; 4 列目に 1 列目を $\frac{1}{5}$ 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{5} & 2 & -\frac{3}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} & 1 & -\frac{7}{5} \end{pmatrix}$$

対角要素 (2, 2) が 0 なので、0 でない要素を探したところ、(2, 3) に 0 でない要素を見つけましたので、それを対角要素と交換します。

右 P(2,3) ; 2 列目と 3 列目を交換

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -\frac{1}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & -\frac{7}{5} \end{pmatrix}$$

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。

左 Q(2;-1) ; 2 行目を -1 倍

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -\frac{1}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & -\frac{7}{5} \end{pmatrix}$$

対角要素をかなめに他の要素を掃き出します。

列を掃き出します。

左 R(3,2;-2) ; 3 行目に 2 行目を -2 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{7}{5} \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & -\frac{7}{5} \end{pmatrix}$$

左 R(4,2;-1) ; 4 行目に 2 行目を -1 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{7}{5} \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

行を掃き出します。

右 R(2,4;1) ; 4 列目に 2 列目を 1 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{7}{5} \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。

左 $Q(3; -5)$; 3 行目を -5 倍

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

対角要素をかなめに他の要素を掃き出します。
列を掃き出します。

左 $R(4, 3; -\frac{1}{5})$; 4 行目に 3 行目を $-\frac{1}{5}$ 倍して、
加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

行を掃き出します。

右 $R(3, 4; 7)$; 4 列目に 3 列目を 7 倍して、
加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

rank = 4

A.10

$$\begin{pmatrix} -2 & 4 & -4 & 6 & -2 \\ 2 & -8 & 7 & -8 & 4 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。

左 $Q(1; -\frac{1}{2})$; 1 行目を $-\frac{1}{2}$ 倍

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & -8 & 7 & -8 & 4 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

対角要素をかなめに他の要素を掃き出します。
列を掃き出します。

左 $R(2, 1; -2)$; 2 行目に 1 行目を -2 倍して、
加える

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -4 & 3 & -2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

左 $R(3, 1; 1)$; 3 行目に 1 行目を 1 倍して、
加える

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -4 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & 3 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

左 $R(4, 1; -1)$; 4 行目に 1 行目を -1 倍して、
加える

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -4 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 4 & -3 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

行を掃き出します。

右 $R(1,2;2)$; 2列目に1列目を2倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -4 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 4 & -3 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

右 $R(1,3;-2)$; 3列目に1列目を-2倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & -4 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 4 & -3 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

右 $R(1,4;3)$; 4列目に1列目を3倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 4 & -3 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

右 $R(1,5;-1)$; 5列目に1列目を-1倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 4 & -3 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

対角要素が1でないので1に正規化します。

左 $Q(2;-\frac{1}{4})$; 2行目を $-\frac{1}{4}$ 倍

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -3 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 4 & -3 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

対角要素をかなめに他の要素を掃き出します。

列を掃き出します。

左 $R(3,2;3)$; 3行目に2行目を3倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 4 & -3 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

左 $R(4,2;-4)$; 4行目に2行目を-4倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

行を掃き出します。

右 $R(2,3;\frac{3}{4})$; 3列目に2列目を $\frac{3}{4}$ 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

右 $R(2,4;-\frac{1}{2})$; 4列目に2列目を $-\frac{1}{2}$ 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

右 R(2,5; $\frac{1}{2}$) ; 5 列目に 2 列目を $\frac{1}{2}$ 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。

左 Q(3; $\frac{4}{3}$) ; 3 行目を $\frac{4}{3}$ 倍

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

対角要素をかなめに他の要素を掃き出します。

行を掃き出します。

右 R(3,4; $\frac{2}{3}$) ; 4 列目に 3 列目を $\frac{2}{3}$ 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

右 R(3,5; $-\frac{2}{3}$) ; 5 列目に 3 列目を $-\frac{2}{3}$ 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

rank = 3

A.11

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 6 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

対角要素 (1, 1) が 0 なので、0 でない要素を探したところ、(1, 2) に 0 でない要素を見つけましたので、それを対角要素と交換します。

右 P(1,2) ; 1 列目と 2 列目を交換

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \\ 6 & 3 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。

左 Q(1;-1) ; 1 行目を -1 倍

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ -3 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \\ 6 & 3 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

対角要素をかなめに他の要素を掃き出します。

列を掃き出します。

左 R(2,1;3) ; 2 行目に 1 行目を 3 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \\ 6 & 3 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

左 R(3,1;-2) ; 3 行目に 1 行目を -2 倍して、
加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 6 & 3 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

左 R(4,1;-6) ; 4 行目に 1 行目を -6 倍して、
加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 8 & -4 \end{pmatrix}$$

行を掃き出します。

右 R(1,3;1) ; 3 列目に 1 列目を 1 倍して、
加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 8 & -4 \end{pmatrix}$$

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。

左 Q(2;-1) ; 2 行目を -1 倍

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 8 & -4 \end{pmatrix}$$

対角要素をかなめに他の要素を掃き出します。

列を掃き出します。

左 R(4,2;-3) ; 4 行目に 2 行目を -3 倍して、
加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

行を掃き出します。

右 R(2,3;-4) ; 3 列目に 2 列目を -4 倍して、
加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

右 R(2,4;2) ; 4 列目に 2 列目を 2 倍して、
加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。

左 Q(3; $\frac{1}{2}$) ; 3 行目を $\frac{1}{2}$ 倍

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

対角要素をかなめに他の要素を掃き出します。

列を掃き出します。

左 $R(4,3;4)$; 4 行目に 3 行目を 4 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

行を掃き出します。

右 $R(3,4;\frac{1}{2})$; 4 列目に 3 列目を $\frac{1}{2}$ 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

rank = 3

A.12

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

対角要素が 1 でないので 1 に正規化します。

左 $Q(1;-1)$; 1 行目を -1 倍

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

対角要素をかなめに他の要素を掃き出します。

列を掃き出します。

左 $R(2,1;-1)$; 2 行目に 1 行目を -1 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

左 $R(3,1;-1)$; 3 行目に 1 行目を -1 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

行を掃き出します。

右 $R(1,3;2)$; 3 列目に 1 列目を 2 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

右 $R(1,4;1)$; 4 列目に 1 列目を 1 倍して、加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

対角要素 (2, 2) が 0 なので、0 でない要素を探したところ、(2, 4) に 0 でない要素を見つけましたので、それを対角要素と交換します。

右 $P(2,4)$; 2 列目と 4 列目を交換

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

rank = 2