代幾 I 演習 (2008/04/17)

例題　ドモアブルの公式を用いて cos と sin の倍角公式を同時に求めてみよう。

$$\cos 2\theta + i\sin 2\theta = e^{2i\theta} = (\cos\theta + i\sin\theta)^2$$

の右辺を展開すると,

$$\cos 2\theta + i\sin 2\theta = (\cos^2\theta - \sin^2\theta) + i\cdot 2\sin\theta\cos\theta$$

を得る。両辺の実部と虚部はそれぞれ等しいので,

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta,$$

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

となり倍角公式が同時に得られた。

問題 21　　ドモアブルの公式を用いて、cos と sin の 3 倍角公式を求めよ。

問題 22

1. $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ を利用して，三角関数の積を和に直す公式,

$$\cos\theta\sin\varphi = \frac{1}{2}(\sin(\theta+\varphi) - \sin(\theta-\varphi))$$

を証明せよ。

(ヒント: 右辺の形に注目して $\frac{1}{2}(e^{i(\theta+\varphi)} - e^{i(\theta-\varphi)})$ を用いることを考えてみよ。)

2. $\cos\theta\cos\varphi$ の公式と $\sin\theta\sin\varphi$ の公式を同時に導いてみよ。

問題 23　　$r \neq 1$ であるような正の実数 r に対し、次の和を求めよ。

1. $1 + r\cos\theta + r^2\cos 2\theta + \cdots + r^{n-1}\cos(n-1)\theta$
2. $r\sin\theta + r^2\sin 2\theta + \cdots + r^{n-1}\sin(n-1)\theta$

問題 24　　互いに素な正整数 a, b と整数 $0 \leq r < a$ と $0 \leq s < b$ が与えられている。
このとき、a で割ると r 余り、b で割ると s 余る整数で 0 以上 ab 未満のものがちょうど一つあることを示せ。

問題 25　　a, b の最大公約数を d とし，整数 x_0, y_0 は $ax_0 + by_0 = d$ を満すとする。このとき，$ax + by = d$ の整数解は整数 t を用いて

$$x = x_0 + \frac{bt}{d},\ y = y_0 - \frac{at}{d}$$

と書くことができることを示せ。

問題 26

$N[x] = \{f(x)|x$ を変数とする自然数係数多項式 $\}$

$C[x] = \{f(x)|x$ を変数とする複素係数多項式 $\}$

とした時に、それぞれ、$N[x]$ と、$C[x]$ が四則 (和、差、積、商) と、多項式の合成に関して、閉じているならば、その証明を、閉じていないならば、その反例を挙げなさい。

問題 27 次の deg の性質を証明しなさい。

1. $\deg\,(f(x) \pm g(x)) \leq \max(\deg\,f(x), \deg\,g(x))$
2. $\deg\,(f(x)g(x)) = \deg\,f(x) + \deg\,g(x)$ (ただし、$f(x)$ も $g(x)$ も 0 でないとする)
3. $f(x) = h(x)g(x) + r(x)$ で $(g(x) \neq 0, h(x)$ は商) の時 $\deg\,h(x) = \deg\,f(x) - \deg\,g(x)$

問題 28 $\deg\,f(g(x))$ を $\deg\,f(x)$ と $\deg\,g(x)$ で表すと、どうなるか ? その関係を示し、証明しなさい。

問題 29 多項式 $f(x)$ を $x-a$, $x-b$ $(a \neq b)$ で割った余りをそれぞれ r, s とするとき $f(x)$ を $(x-a)(x-b)$ で割った余りを求めよ。

問題 30 実係数の 3 次方程式 $x^3 + px + q = 0$ が虚根 $a + bi$ をもてば、$-2a$ も根であることを示せ。

問題 31 任意の実数に対して、次の不等式の性質

(a) 任意の二つの実数 $x, y (x, y \in \boldsymbol{R})$ に対して、$x > y$, $x = y$, $x < y$ の内のいずれか一つが、必ず成立する。

(b) $a > b$ の時、$x > 0$ ならば $ax > bx$ であり、$x < 0$ ならば $ax < bx$ である。

が、成り立つこと利用して、以下の問いに答えよ。

1. 任意の実数 x に対して、$x^2 \geq 0$ (ただし $x^2 = 0$ なのは $x = 0$ の時) を示せ。
2. i を虚数単位 (すなわち、$i^2 = -1$) とすると、i は、実数でない ($i \notin \boldsymbol{R}$ である) ことを示せ。

問題 32 次の不等式を証明せよ。

1. $(ax + by + cz)^2 \leq (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2)$ (シュワルツの不等式)
2. $\sqrt{(a+x)^2 + (b+y)^2 + (c+z)^2} \leq \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)} + \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}$ (三角不等式)

問題 33 二項定理の証明をしなさい