代幾 I 演習 (2008/04/24)

問題 34　次の整数の組の最大公約数を求めよ。

1. $a = 12345654321, b = 1234321$,　2. $a = 832040, b = 2584$,　3. $a = 2^{30} - 1, b = 2^{18} - 1$.

問題 35　問題 34 のそれぞれの問に対し、d を a と b の最大公約数とした時, $ax + by = d$ となる整数 x, y を一組求めよ。

問題 36　次の式をみたすような整数 x, y を一組求めよ。

1. $7x + 5y = 1$　2. $13x + 11y = 1$,　3. $30x + 42y = 6$.

問題 37

1. $7x + 11y = 1$ となるような整数 x, y を一組求めよ。
2. 上の問の x を用いて、7 で割ると割り切れ 11 で割ると 1 余る整数をひとつ求めよ。
3. $14x + 55y$ を 7 で割った余りと、11 で割った余りを求めよ。
4. 7 で割ると 3 余り、11 で割ると 2 余る整数を求めよ。
5. 7 で割ると 3 余り、11 で割ると 2 余る整数で 0 以上 77 未満のものがちょうど一つあることを示せ。

問題 38　複素数 $z = x + yi \quad (y \neq 0)$ に対して、zz' も $z + z'$ も共に実数になるならば、実は、z' は、z の共役複素数 $\bar{z}$ であることを示せ。

問題 39

極形式で記述された二つの複素数 $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1), z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ に対して、$\theta_1 - \theta_2 = n\pi \quad (n \in \boldsymbol{Z})$ の時、この二つの複素数は z_1, z_2 は**平行である** と呼ぶ[1]。

二つの複素数 $z_1, z_2 \quad (z_2 \neq 0)$ が平行であるための必要十分条件は、$\frac{z_1}{z_2}$ が実数の時、即ち、$\frac{z_1}{z_2} = \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}$ であることを示せ。

問題 40　二次方程式 $x^2 + px + q = 0$ が複素数解 $a + bi \quad (b \neq 0)$ を持つならば、もう一つの解は、$a - bi$ であることを証明せよ。

[1] これは、z_1, z_2 を複素平面上の点 P_1, P_2 に対応させた時に、ベクトル $\overrightarrow{OP_1}, \overrightarrow{OP_2}$ が平行である条件となっている。

問題 41

極形式で記述された二つの複素数 $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1), z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ に対して、$\theta_1 - \theta_2 = \pm\frac{\pi}{2} + 2n\pi \quad (n \in \boldsymbol{Z})$ の時、この二つの複素数は z_1, z_2 は**直交する** と呼ぶ[2]。

二つの複素数 $z_1, z_2 \quad (z_2 \neq 0)$ が直交するための必要十分条件は、$\frac{z_1}{z_2}$ が純虚数の時、即ち、$\frac{z_1}{z_2} = -\overline{(\frac{z_1}{z_2})}$ であることを示せ。

問題 42 複素平面上の点 $P(x,y), A(x_1,y_1), B(x_2,y_2)$ とそれに対応する複素数 $z = x + yi, \alpha = x_1 + y_1 i, \beta = x_2 + y_2 i$ について次の問いに答えなさい。

1. 点 A を通り、ベクトル $\overrightarrow{OB}$ に平行な直線 l_1 上の点が P である為の必要十分条件は、それぞれ対応する複素数の間に $\bar{\beta}z - \beta\bar{z} = \bar{\beta}\alpha - \beta\bar{\alpha}$ の関係が成立することであることを証明せよ。

2. 二点 A, B を通る直線 l_2 上の点が P である為の必要十分条件は、それぞれ対応する複素数の間に $(\bar{\beta} - \bar{\alpha})z - (\beta - \alpha)\bar{z} = \bar{\beta}\alpha - \beta\bar{\alpha}$ の関係が成立することであることを証明せよ。

問題 43 複素平面上の点 $P(x,y), A(x_1,y_1), B(x_2,y_2)$ とそれに対応する複素数 $z = x + yi, \alpha = x_1 + y_1 i, \beta = x_2 + y_2 i$ について次の問いに答えなさい。

1. 点 A を通り、ベクトル $\overrightarrow{OB}$ に垂直な直線 l_3 上の点が P である為の必要十分条件は、それぞれ対応する複素数の間に $\bar{\beta}z + \beta\bar{z} = \bar{\beta}\alpha + \beta\bar{\alpha}$ の関係が成立することであることを証明せよ。

2. 線分 AB の垂直二等分線 l_4 上の点が P である為の必要十分条件は、それぞれ対応する複素数の間に $(\bar{\beta} - \bar{\alpha})z + (\beta - \alpha)\bar{z} = \bar{\beta}\beta - \alpha\bar{\alpha}$ の関係が成立することであることを証明せよ。

問題 44

1. 三次方程式 $x^3 + 3px + q = 0$ の根を α, β, γ としたとき、$(\alpha - \beta)^2(\beta - \gamma)^2(\gamma - \alpha)^2$ を p, q の多項式で表わせ。

2. $f(x) = x^3 + 3px + q$ としたとき，$f(x) = 0$ が重根を持つための必要十分条件は $f(x)$ と $f'(x) = 3x^2 + 3p$ が互いに素ではないことを示せ。また，この条件を p, q の多項式を用いて表せ。

問題 45 方程式 $x^7 - 1 = 0$ の根と係数の関係を用いて、次の等式を証明せよ。

$$1 + \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7} + \cos\frac{8\pi}{7} + \cos\frac{10\pi}{7} + \cos\frac{12\pi}{7} = 0$$

---

[2] これは、z_1, z_2 を複素平面上の点 P_1, P_2 に対応させた時に、ベクトル $\overrightarrow{OP_1}, \overrightarrow{OP_2}$ が直交する条件となっている。