# 代幾 I 演習 (2008/05/08)

**問題 46**　三角形 ABC に対して、ベクトル $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}$ を、それぞれ $\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ と表すとき、次の問いに答えなさい。

1. 一般に、二つのベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ に対して、$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2 = |\boldsymbol{a}|^2 + 2(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + |\boldsymbol{b}|^2$ が成立することを示せ。
2. 三角形 ABC が直角三角形 ($\angle C$ を直角) である時、$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$ であることと、$\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$(すなわち $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 0$) を利用して、ピタゴラスの定理 (三平方の定理) を証明しなさい。

**問題 47**　次の問いに答えなさい。

1. 三つの実ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ に対して、$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{c}$ の交角を $\theta_1$, $\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{c}$ の交角を $\theta_2$ とし、また、$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の長さは等しいとする。この時、$\theta_1 = \theta_2 \Rightarrow (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ を示せ。
2. 二等辺三角形 ABC ( ただし、AB = AC とする ) に対して、$\angle A$ の角の二等分線と、底辺 BC の交点を P とする時に、実は、P は、底辺 BC を二等分することを、ベクトルの長さと内積を用いて示せ。(ヒント：$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{AB}, \boldsymbol{b} = \overrightarrow{AC}, \boldsymbol{c} = \overrightarrow{AP}$ とすれば、前小問の結果が利用できる。後は、$\overrightarrow{BP} = \boldsymbol{c} - \boldsymbol{a}$ であることを利用すれば... )

**問題 48**　次の平面幾何学の問題 (内心) を、ベクトルの長さと内積を用いて証明しなさい。

1. 三角形 ABC の各々の角の二等分線の交点が、一点で交わることを示せ。
2. その点が三角形 ABC の内接円の中心であることを示せ。

**問題 49**　次の平面幾何学の問題 (外心) を、ベクトルの長さと内積を用いて証明しなさい。

1. 三角形 ABC の各々の辺の垂直二等分線の交点が、一点で交わることを示せ。
2. その点が三角形 ABC の外接円の中心であることを示せ。

**問題 50**　点 $U$ を通り、0 ベクトルでないベクトル $\boldsymbol{a}$ に平行な直線 $l$ と、その直線上にない点 $Q$ から、直線 $l$ への垂線の足を $H$ とした時に、線分 $QH$ の長さが、点 $Q$ と、直線 $l$ の距離になっていることを示せ。(ヒント：直線 $l$ 上の点を $P$ としたとき、$Q$ と $l$ の距離とは、線分 $PQ$ の最小値のことである。)

**問題 51**

　Text (p.3) の定理 [1.1]、並びに 定理 [1.2] は、図形的に証明を行っている行っているが、空間ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ が、それぞれ以下のような成分を用いて、表現されているとして、これらを成分の計算の立場から証明しなさい。(注意: 何れの定理も三つの等式からなるが、それを全て示すこと)

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

1. 定理 [1.1] が空間ベクトルについて成立することを、成分の計算によって示せ。
2. 定理 [1.2] が空間ベクトルについて成立することを、成分の計算によって示せ。

**問題 52**　Text (p.6) の定理 [1.3] の内積の性質の内、(7), (8), (9) を、空間ベクトルの成分表示を用いて示せ。

**問題 53**　空間ベクトルの三つの基本ベクトル

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

を用いて、任意の空間ベクトル

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

は、この三つの基本ベクトルの線型和

$$\boldsymbol{v} = xe_1 + ye_2 + ze_3$$

で表現できることは学んだ ( Text p.5 ) が、この表現が一意であることを示せ。(ヒント：$\boldsymbol{v}$ が $\boldsymbol{v} = x'e_1 + y'e_2 + z'e_3$ の様に、表現できると仮定すると、実は、$x = x', y = y', z = z'$ が成立することを示せばよい )

**問題 54**　空間ベクトルの三つの基本ベクトル $e_1, e_2, e_3$ について、次の問いに答えなさい。

1. この基本ベクトルは互いに直交していることを示せ。
2. 任意の空間ベクトル $\boldsymbol{v}$ は、この基本ベクトルと内積を用いて、次のように表現できることを示せ。

$$\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{v}, e_1)e_1 + (\boldsymbol{v}, e_2)e_2 + (\boldsymbol{v}, e_3)e_3$$