代幾 I 演習 (2008/05/22)

問題 55 $\quad \boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ とする。

1. $\boldsymbol{V}^3$ の単位ベクトル $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ をそれぞれ $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ の線型結合で表せ。
2. 上の問の結果を利用して，次のベクトルを $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ の線型結合で表せ。

   (a) $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$, (b) $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, (c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

問題 56 $\quad \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ は $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ の線型結合として表すことはできないことを示せ。

問題 57 次を証明しなさい。

1. ある空間ベクトル $\boldsymbol{z}$ が、任意の空間ベクトル $\boldsymbol{v}$ に対して、$(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{v}) = 0$ を満すならば、実は、$\boldsymbol{z}$ が 0 ベクトルであることを示せ。
2. ある二つの空間ベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ があり、任意の空間ベクトル $\boldsymbol{v}$ に対して、$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{v})$ を満すならば、$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ であることを示せ。

問題 58 A を実数を成分とする二行二列 (二次の正方行列)、$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ を二次元 (平面) の縦ベクトル、c を実数とすると、次の線型性が成立することを示しなさい。

$$A(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = (A\boldsymbol{x}) + (A\boldsymbol{y})$$

$$(cA)\boldsymbol{x} = A(c\boldsymbol{x})$$

(ヒント:行列 A 並びに、ベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ を成分表示し、等号の左辺と右辺の結果が同じであることを示せばよい)

問題 59 二次元の点を、原点を中心に α だけ反時計回りに回転させる行列を R_α とすると、その行列の成分は、次のようになる。

$$R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

講義の定義では、R_α と R_β の積 ($R_\beta R_\alpha$) を、図形的な意味から $R_{\alpha+\beta}$ で定義した (Text p.16)。

これが、一般的な行列の積の定義と矛盾していないことを示しなさい。

問題 60　二つの空間ベクトルの $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}$ がそれぞれ次のように成分表示されているとする。

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

この時、この二つのベクトルの内積が、成分を用いて、次のようになることは学んだ (Text p.6 の (2) 式)。

$$(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

これを次の事実を用いて導け。

- 空間ベクトルの単位ベクトル e_1, e_2, e_3 に関してだけは、内積を次の様に定義する[1]。

$$(e_i, e_j) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & (i = j \text{ の時}) \\ 0 & (i \neq j \text{ の時}) \end{cases}$$

- 内積の性質 (Text p.6 の定理 [1.3] (7) - (9))。
- 任意の空間ベクトルは、単位ベクトルの線型結合で表すことができる (Text p.5)。

問題 61　二つの二次の正方行列 A, B に関して、行列間の等号 「$A = B$」を、「$\forall \boldsymbol{x} \in V^2$ s.t. $A\boldsymbol{x} = B\boldsymbol{x}$ 」で定義する (つまり、「任意の平面ベクトル $\boldsymbol{x}$ に対して、$A\boldsymbol{x} = B\boldsymbol{x}$ が成立」した時に、「$A = B$」とする)。この時、行列 A, B の成分に関して、次の性質が成り立つことを示しなさい。

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \text{に対して、} A = B \Leftrightarrow \begin{cases} a = e \\ b = f \\ c = g \\ d = h \end{cases}$$

(ヒント: 右から左 ($\Leftarrow$) は、単に、$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ を成分表示し、その計算結果を比較すればよい。逆 ($\Rightarrow$) も、同様に行っても良いが、特別なベクトル $\boldsymbol{e}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ に関しても、$A\boldsymbol{e}_0 = B\boldsymbol{e}_0, A\boldsymbol{e}_1 = B\boldsymbol{e}_1$ が成立することを利用した方が簡単になる)

[1] この定義に用いられる記号 $\delta_{i,j}$ を**クロネッカーの記号** (Text p.35 参照) と呼ぶ。