代幾 I 演習 (2008/06/05)

問題 62　A, B を $(2,2)$ 行列とする。

1. $AB = BA$ ならば
$$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2,$$
$$(A+B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$$
となることを証明せよ。

2. $(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$ となるような行列 A, B の例を与えよ。

問題 63　互いに直交する 0 でない二つのベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ に対し、それぞれへの射影子を、$P_{\boldsymbol{x}}, P_{\boldsymbol{y}}$ で表すとする。この時、次の等式を証明しなさい。

1. $P_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}, P_{\boldsymbol{y}}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}$
2. $P_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{y} = P_{\boldsymbol{y}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
3. $P_{\boldsymbol{x}} + P_{\boldsymbol{y}} = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
4. $P_{\boldsymbol{x}} \cdot P_{\boldsymbol{y}} = O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(ヒント:この二つのベクトルは、独立なので、任意の平面ベクトル $\boldsymbol{z}$ が、実は、ある実数の組 a, b を用いて、$\boldsymbol{z} = a\boldsymbol{x} + b\boldsymbol{y}$ と表されることを利用すれば...)

問題 64　座標平面を原点を中心にして、反時計まわりに θ 回転移動したとき、点 $P(x,y)$ の移る先の点を $P(x', y')$ とする。
$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ に $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ を対応させる写像 T は $\boldsymbol{R}^2$ から $\boldsymbol{R}^2$ への線型写像であることを示せ。

問題 65　上と同様のことを、原点を通る直線に関する対称移動について示せ。

問題 66　$\boldsymbol{a}$ を 0 でないベクトルとし、T を、$\boldsymbol{a}$ への射影子とする。この時、0 でない実数 c に対して、$c\boldsymbol{a}$ への射影子を T' とすると、実は、$T' = T$ となることを示せ[1]。

[1] このことから、射影子で用いられるベクトルは、実は、その大きさには意味がなく、そのベクトルの向きだけが意味を持つということが解る。これは射影子の図形的な意味からも推察される。

問題 67　三次元空間の二つの直線 ℓ_1, ℓ_2 がそれぞれ、点 P_1, P_2（その位置ベクトルは、$\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2$ とする）を通り、ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ に平行である時、この二つの直線の距離を、ベクトル $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ を用いて表せ。

問題 68　$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とおく。

1. $J^2 = -E$ であることを示せ。

2. $a, b, c, d, e, f \in \boldsymbol{R}$ とする。このとき、次を示せ。ただし、i は虚数単位である。

$$(a + bi) + (c + di) = e + fi \;\Leftrightarrow\; (aE + bJ) + (cE + dJ) = eE + fJ,$$

$$(a + bi)(c + di) = e + fi \;\Leftrightarrow\; (aE + bJ)(cE + dJ) = eE + fJ.$$

3. $(4E - 3J)A = E$ となる行列 A を求めよ。

4. $(aE + bJ)(cE + dJ) = (cE + dJ)(aE + bJ)$ であることを示せ。

問題 69　次を証明せよ。

1. 平面ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ が線型従属ならば、ある $u, v (\in \boldsymbol{R})$（ただし、$u, v$ のどちらか一方が 0 でない）があり、$u\boldsymbol{a} + v\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ となることを示せ。(ヒント：平面上の原点を通る直線の方程式は $ax + by = 0$ [ただし a, b の内どちらかは 0 でない] として表すことができる。$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ が線型従属ならば、これらを位置ベクトルとする点 A, B の座標が同一直線上にあるので..)

2. 上記の逆を示せ。すなわち、ある $u, v (\in \boldsymbol{R})$（ただし、$u, v$ のどちらか一方が 0 でない）があり、$u\boldsymbol{a} + v\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ となるならば、平面ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ が線型従属であることを示せ。

問題 70　次を証明せよ。

1. 空間ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ が線型従属ならば、ある $u, v, w (\in \boldsymbol{R})$（ただし、$u, v, w$ のいずれかの内、少くても一つが 0 でない）があり、$u\boldsymbol{a} + v\boldsymbol{b} + w\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$ となることを示せ。(ヒント：空間内の原点を通る平面の方程式は $ax + by + cz = 0$ [ただし a, b, c の内、いずれか一つは 0 でない] として表すことができるので..)

2. 上記の逆を示せ。すなわち、ある $u, v, w (\in \boldsymbol{R})$（ただし、$u, v, w$ のいずれかの内、少くても一つが 0 でない）があり、$u\boldsymbol{a} + v\boldsymbol{b} + w\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$ となるならば、平面ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ が線型従属であることを示せ。

[**定義**] 上記の二つの大問の結果を拡張することによって、より一般的に次の形で、$n(>0)$ 個のベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ に対する線型独立並びに線型従属が次のように定義される（平面ベクトルや、空間ベクトルの性質はこの定義の特殊な場合である）。

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n \text{が線型独立} &\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall c_1, c_2, .., c_n (\in R) s.t. \sum_{i=1}^{n} c_i \boldsymbol{a}_i \neq \boldsymbol{0} \\
&\quad\ (\text{ただし、}c_i\text{の少くても一つは}0\text{でない}) \\
\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n \text{が線型従属} &\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n \text{が線型独立でない} \\
&\Leftrightarrow \exists c_1, c_2, .., c_n (\in R) s.t. \sum_{i=1}^{n} c_i \boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{0} \\
&\quad\ (\text{ただし、}c_i\text{の少くても一つは}0\text{でない})
\end{aligned}
$$

問題 71　平面のベクトルについて、次を証明せよ。

1. 任意の平面ベクトル $\boldsymbol{v}$ と、二つの単位ベクトル e_1, e_2 の計三つのベクトルは線型従属であることを示せ。
2. $\boldsymbol{v}$ と e_1 が独立ならば、e_2 を、$\boldsymbol{v}$ と、e_1 の線型結合で表すことができることを示せ。
3. $\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{u}$ が独立ならば、$\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{u}$ のどちから一方は、e_1 と独立であることを示せ。
4. $\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{u}$ が独立ならば、e_1 を、$\boldsymbol{v}$ と、$\boldsymbol{u}$ の線型結合で表すことができることを示せ。
5. $\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{u}$ が独立ならば、任意の平面ベクトルが、$\boldsymbol{v}$ と、$\boldsymbol{u}$ の線型結合で表すことができることを示せ。

問題 72　空間のベクトルについて、次を証明せよ。

1. 任意の平面ベクトル $\boldsymbol{v}$ と、三つの単位ベクトル e_1, e_2, e_3 の計四つのベクトルは線型従属であることを示せ。
2. $\boldsymbol{v}$ と e_1, e_2 が独立ならば、e_3 を、$\boldsymbol{v}$ と、e_1, e_2 の線型結合で表すことができることを示せ。
3. $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}$ が独立ならば、$\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}$ のどれか一つは、e_1, e_2 と独立であることを示せ。
4. $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}$ が独立ならば、e_1 を、$\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}$ の線型結合で表すことができることを示せ。
5. $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}$ が独立ならば、任意の空間ベクトルが、$\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}$ の線型結合で表すことができることを示せ。

問題 73　次を証明せよ。

1. 一つのベクトルが線型従属ならば、そのベクトルは零ベクトルであることを示せ。

2. 三つの平面ベクトルは常に線型従属であることを示せ。

3. 四つの空間ベクトルは常に線型従属であることを示せ。

問題 74

1. 二つの平面ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ が共に、$\mathbf{0}$ ベクトルでなく、また、互いに、直交するならば、この二つのベクトルは線型独立であることを示せ。

2. 三つの空間ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ が、いずれも $\mathbf{0}$ ベクトルでなく、また、どの二つを取っても互いに直交するならば、実は、この三つのベクトルは線型独立であることを示せ。

3. 一般に、$n(>0)$ 個のベクトルに対して、どれも $\mathbf{0}$ ベクトルでなく、しかも、その中の任意の相異なる二つのベクトルが直交するのであれば、この n 個のベクトルは線型独立であることを示せ。

問題 75　次を証明せよ。

1. $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ の中に同じベクトルが 2 個以上現れるなら $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ は線型従属である。

2. $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ の中に零ベクトル $\mathbf{0}$ が現れるならば、$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ は線型従属である。

問題 76　n 個ののベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ に対して、その中からどの $n-1$ 個のベクトルを取ってきても線型独立だが、n 個全部だと線型従属になってしまうような組み合わせが存在することを示せ。(ヒント：最初に互いに線型独立な $n-1$ 個の線型独立な $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_{n-1}$ を考え、$\boldsymbol{a}_n$ を、この $n-1$ 個のベクトルの線型結合で表すと...)

問題 77　$\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ が与えられたとする。$\boldsymbol{b}$ が $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ の線型結合として異なる方法で

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{b} &= c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{a}_n \\
\boldsymbol{b} &= c'_1\boldsymbol{a}_1 + c'_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + c'_n\boldsymbol{a}_n
\end{aligned}
$$

と書けたとする (すなわち、$c_i \neq c'_i$ となるような i が少くても一つはある。)。このとき $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ は線型従属であることを示せ。

問題 78　n 個のベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ が線型独立であれば、その内から $i(0 < i < n)$ 個のベクトルを任意に選んでも、それらが線型独立になることを示せ。(ヒント：前問の結果を利用し、背理法を使えば..)

問題 79　n 個の $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ に対して、もし、その内の幾つかのベクトルが線型従属になっていたら、全体も線型従属になることを示せ。