代幾 I 演習 (2008/06/26)

問題 91　2 行 2 列の行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ が、二つの縦ベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}, \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$ を用いて、$A = (\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})$ と表されている時、次の問に答えなさい。

1. $a_{21} = 0$ ならば、$|A| = a_{11}a_{22}$ であることを示しなさい。
2. 任意の実数 c に対して、$\det(\boldsymbol{x} - c\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}) = |A|$ であることを示しなさい。
3. 2 行 2 列の行列 $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ が、上記のベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ を使って、$B = (\boldsymbol{x} - \frac{a_{21}}{a_{22}}\boldsymbol{y}\ \boldsymbol{y})$ と表されている (ただし、$a_{22} \neq 0$ とする) 時、B の各々の要素 b_{ij} の値を a_{ij} を用いて表しなさい
4. 行列 $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ に対して、$|D| = |C|$ を満たし、$D = \begin{pmatrix} x & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ となるような x を求めなさい。また、この時、$|D|$ と $|C|$ の値をそれぞれ求めなさい。

問題 92　3 行 3 列の行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ が、三つの縦ベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}, \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix}, \boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix}$ を用いて、$A = (\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y},\ \boldsymbol{z})$ と表されている時、次の問に答えなさい。

1. $a_{21} = a_{32} = a_{31} = 0$ ならば、$|A| = a_{11}a_{22}a_{33}$ であることを示しなさい。
2. 任意の実数 c に対して、$\det(\boldsymbol{x} - c\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = |A|$ であることを示しなさい。
3. 3 行 3 列の行列 $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$ が、上記のベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ を使って、$B = (\boldsymbol{x}\ \boldsymbol{y} - \frac{a_{32}}{a_{33}}\boldsymbol{z}\ \boldsymbol{z})$ と表されている (ただし、$a_{33} \neq 0$ とする) 時、B の各々の要素 b_{ij} の値を a_{ij} を用いて表しなさい。
4. 行列 $C = \begin{pmatrix} -4 & -3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ に対して、$|D| = |C|$ を満たし、$D = \begin{pmatrix} u & -\frac{3}{2} & -2 \\ 0 & v & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ となるような u, v を求めなさい (このような、u, v の組は、一組とは限らないが、どれか一つを求めればよい。)。また、この時、$|D|$ と $|C|$ の値をそれぞれ求めなさい。

問題 93 　行列 A と $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ が $A\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $A\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $A\boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, を満たすとき $A(-\boldsymbol{x} + 2\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z})$ を求めよ。

問題 94 　2 行 2 列の行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ に対して、${}^tA = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$ を行列 A の転置行列と呼ぶ。この時 $|A| = |{}^tA|$ であることを示しなさい。

問題 95 　3 行 3 列の行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ に対して、${}^tA = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$ を行列 A の転置行列と呼ぶ。この時 $|A| = |{}^tA|$ であることを示しなさい。

問題 96 　行列 A の複素共役行列を、$\overline{A}$ で、表すとする。この時、次の定理を証明せよ。

1. $\overline{\overline{A}} = A$
2. $\overline{A + B} = \overline{A} + \overline{B}$
3. $\overline{cA} = \overline{c}\overline{A}$
4. $\overline{(AB)} = (\overline{A})(\overline{B})$

問題 97 　行列 A の転置行列を ${}^tA$, 複素共役行列を、$\overline{A}$ で、表すとする。この時、次の定理を証明せよ。

1. ${}^t({}^tA) = A$
2. ${}^t(\,\overline{A}\,) = \overline{(\,{}^tA)}$
3. ${}^t(A + B) = {}^tA + {}^tB$
4. ${}^t(cA) = c\,{}^tA$
5. ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$

問題 98

$$X = \begin{pmatrix} x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y & 1 \\ 0 & 0 & 0 & y \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a \\ b & 1 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

とする。区分けによる計算を用いて X^2, X^3, A^2, A^3, AX, XA を求めよ。

問題 99 A, B を (l, m) 行列、C, D を (m, n) 行列、$O_{p,q}$ を (p, q) 型の零行列とする時に、次の定理を証明しなさい。

1. $A(C+D) = AC + AD$
2. $(A+B)C = AC + BC$
3. $AO_{m,n} = O_{l,n}, \quad O_{l,m}C = O_{l,n}$

問題 100 A, B, C を (m, n) 行列、c, d を複素数、O を (m, n) 型の零行列とした時に、次の定理を証明しなさい。

1. $A + O = A, \quad A - A = O$
2. $(A+B) + C = A + (B+C)$
3. $A + B = B + A$
4. $c(A+B) = cA + cB$
5. $(c+d)A = cA + dA$
6. $(cd)A = c(dA)$
7. $1A = A, \quad 0A = O$

問題 101 A, B, C を n 次正則行列とする。このとき、$(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$ となることを示せ。

問題 102 次の条件を満たす行列 A, B の例を作ってみよ。

1. 積 AB は定義できるが BA は定義できない。
2. AB, BA はどちらも定義できるが次数が異なる。
3. AB, BA はどちらも 2 次行列になるが、$AB \neq BA$ となる。
4. AB, BA はどちらも 2 次行列で、$AB = BA$ となる。

問題 103 A を n 次正則行列とする。${}^t(AA^{-1}) = {}^t(A^{-1}A) = {}^tE = E$ を用いて $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$ が成り立つことを示せ。

問題 104 $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 2 & -4 \end{pmatrix}$ とする。行列の積の結合法則を利用して A^5 を計算せよ。

問題 105

$$A=\begin{pmatrix} 0&0&0&2&0&0&0&1\\ 0&0&2&0&0&0&1&0\\ 0&2&0&0&0&1&0&0\\ 2&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&-1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&-1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&-1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&-1 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 0&0&0&0&-1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&-1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&-1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&-1\\ 1&0&0&0&2&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&2&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&2&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&2 \end{pmatrix}$$

の時、次の行列の計算をしなさい。
1. AB,　2. BA　3. A^2,　4. B^2

問題 106

$$A=\begin{pmatrix} a_{11}&a_{12}&a_{13}\\ a_{21}&a_{22}&a_{23}\\ a_{31}&a_{32}&a_{33} \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 0&0&1\\ 0&1&0\\ 1&0&0 \end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix} \lambda&0&0\\ 0&\lambda&0\\ 0&0&\lambda \end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix} 1&\lambda&0\\ 0&1&0\\ 0&0&1 \end{pmatrix}$$

の時、次の行列の計算を行いなさい。
1. AB,　2. BA,　3. AC,　4. CA,　5. AD,　6. DA

問題 107　$E=\begin{pmatrix} 1&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&1 \end{pmatrix}, J=\begin{pmatrix} 0&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$ とおく。

1. J^2, J^3, J^4, J^5 を求めよ。
2. 二項定理を利用して $(E+J)^{10}$ を求めよ。