代幾 I 演習 (2008/07/03)

【定義】 (複素変換関数に対応した平面上の変換)
複素数上の変換 $\phi(z) : \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{C}$ に対して、平面のベクトルの変換 T_ϕ を、次のように定める。

$$T_\phi(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} \mathrm{Re}(\phi(x+yi)) \\ \mathrm{Im}(\phi(x+yi)) \end{pmatrix}$$

この変換 T_ϕ を ϕ に**対応する変換**と呼ぶ[1]。

問題 108

1. $c \in \boldsymbol{C}$ に対して、複素数上の変換 ϕ を $\phi(z) = cz$ と定義すると、これに対応した変換 T_ϕ が線型変換になる事を示せ。
2. $c = u + vi, (u, v \in \boldsymbol{R})$ とした時、上記の線型変換 T_ϕ に対応する行列を、u, v を用いて表せ。
3. $c(\neq 0) \in \boldsymbol{C}$ に対して、$\psi(z) = z + c$ と定義すると、これに対応した変換 T_ψ が線型変換にならない事を示せ。

問題 109　T, S を V 上の線型変換とする。この時、次の問いに答えなさい。

1. T, S の二つの変換の合成 $S \cdot T$ もまた、V 上の線型変換であることを示せ。
2. T の逆変換 T^{-1} が存在すれば、この逆変換 T^{-1} もまた、V 上の線型変換であることを示せ。

問題 110　平面ベクトル $\boldsymbol{v}$ に対して、それを実数 c 倍した $c\boldsymbol{v}$ を対応させる変換を T_c ($c \in \boldsymbol{R}$) で表すことにする (すなわち $T_c(\boldsymbol{v}) = c\boldsymbol{v}$ となる)。この時、次の問いに答えなさい。

1. $T_3(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix})$ を求めなさい。
2. T_c は、線型変換であることを示しなさい。
3. T_c に対して、$T_c = T_A$ を満すような、二行二列の行列 A を求めなさい。

問題 111　二つの平面ベクトル $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}$ が独立であるとする。この時、二つの線型変換 T, S に対して、$T\boldsymbol{p} = S\boldsymbol{p},\ T\boldsymbol{q} = S\boldsymbol{q}$ であれば、実は、$T = S$ であることを示せ。

[1]ただし、Re, Im は、それぞれ複素数の実部、虚部を取り出すものとする。

問題 112　二つの平面ベクトル $\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \boldsymbol{q} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ を考える。任意の平面ベクトル $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ に対して、平面ベクトル $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} (\boldsymbol{p}, \boldsymbol{v}) \\ (\boldsymbol{q}, \boldsymbol{v}) \end{pmatrix}$ を対応させる変換 T を考える (ただし、$(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{v}), (\boldsymbol{q}, \boldsymbol{v})$ は、それぞれ $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}$ と $\boldsymbol{v}$ の内積である)。この時、次の問いに答えなさい。

1. T は線型変換であることを示しなさい。
2. T に対して、$T = T_A$ を満すような、二行二列の行列 A を求めなさい。

問題 113　平面ベクトル $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ に対して、平面ベクトル $\begin{pmatrix} 2x \\ -3y \end{pmatrix}$ を対応させるような二次元ベクトル上の変換 T に対して、次の問に答えなさい。

1. T は線型変換であることを示しなさい。
2. T に対して、$T = T_A$ を満すような、二行二列の行列 A を求めなさい。ただし、T_A は、任意のベクトル $\boldsymbol{u}$ に対して、$T_A(\boldsymbol{u}) = A\boldsymbol{u}$ と、行列 A を用いて定義された変換の事である。
3. $\boldsymbol{u} = T(\boldsymbol{v})$ に対して、$S(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{v}$ を満すような変換 S を、T の逆変換と呼び T^{-1} で表す。この時、変換 T^{-1} は、ベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ をどのようなベクトルに対応させるか？
4. $T^{-1} = T_B$ を満す行列 B を求めなさい。
5. 行列 A と行列 B はどのような関係になっているか？

問題 114　二つの平面ベクトル $\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \boldsymbol{q} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ が互いに独立な時、任意の平面ベクトル $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ に対して、ある実数 m, n が存在して、$\boldsymbol{v} = m\boldsymbol{p} + n\boldsymbol{q}$ と表せる。そこで、この m, n の組を改めて、$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$ というベクトルと同一視し、$\boldsymbol{v}$ を $\boldsymbol{u}$ に対応させる変換を T とする時、次の問いに答えなさい。

1. T は線型変換であることを示しなさい。
2. T の逆変換 T^{-1} に対応する行列 B を求めなさい。
3. T に対応する行列 A を求めなさい。