代幾 I 演習 (2008/07/10)

問題 115

$$A = \begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0
\end{pmatrix}$$

の時、A^n を求めなさい。

問題 116　次の行列の計算をしなさい。

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

問題 117

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とした時に次の値を求めなさい。
1. A^2,　2. A^4,　3. A^{16},　4. A^{40}

問題 118　$(3,2)$-行列 A に対し、5 次行列 B を

$$B = \left(\begin{array}{c|c} E_3 & A \\ \hline O & E_2 \end{array}\right)$$

と定める。ただし、E_3, E_2 はそれぞれ 3 次と 2 次の単位行列である。

1. $B^2 = \left(\begin{array}{c|c} E_3 & 2A \\ \hline O & E_2 \end{array}\right)$ であることを示せ。
2. B^n を求めよ。
3. B は正則行列であることを示せ。

問題 119　(k,l) 行列 A, (l,m) 行列 B, (m,n) 行列 C に対し、${}^t(ABC) = {}^tC\,{}^tB\,{}^tA$ となることを示せ。

問題 120　A を n 次行列とする。この時、次の問に答えなさい。

1. A^2 が正則行列ならば、実は、A 自身も正則行列であることを示せ。
2. A が正則行列ならば、任意の整数 k に対して A^k も正則行列であることを示せ。

問題 121　A, B を次の様な形をした n 次対角行列とする。この時、次の問に答えなさい。

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & b_3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & b_n \end{pmatrix}$$

1. 二つの行列の積 AB を求めなさい。
2. A が逆行列を持つ条件と、A がその条件を満す時の A の逆行列を求めなさい。

問題 122　n 次行列 A に対して $\mathrm{tr}(A)$ で、A の固有和 (trace:トレース) を表すとする ($A = \{a_{ij}\}$ の時、$\mathrm{tr}(A) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$)。この時、P が正則行列であれば、$\mathrm{tr}(P^{-1}AP) = \mathrm{tr}(A)$ であることを示せ。