代幾 I 演習 (2008/10/02)

問題 115　線型空間の公理

1. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (交換法則)
2. $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ (結合法則)
3. $\exists\vec{0}\forall\vec{a}[\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}]$ (零元 [単位元] の存在)
4. $\forall\vec{a}\exists(\vec{-a})[\vec{a}+(\vec{-a})=(\vec{-a})+\vec{a}=\vec{0}]$ (逆元の存在)
5. $c(\vec{x}+\vec{y})=c\vec{x}+c\vec{y}$ (スカラー倍の分配則 I)
6. $(c+d)\vec{x}=c\vec{x}+d\vec{x}$ (スカラー倍の分配則 II)
7. $(cd)\vec{x}=c(d\vec{x})$ (スカラー倍の結合法則)

について、次の問に答えなさい。

1. 零元の性質を満す元は一つしかないことを証明しなさい (零元の uniqueness [ユニークネス:唯一性])。
2. 任意の元 $\vec{x}$ に対して、その 0 倍した元 $0\vec{x}$ は、零元であることを証明しなさい。
3. 任意の元 $\vec{x}$ に対して、その逆元の性質を満す元は、それぞれ一つしかないことを証明しなさい (逆元の uniqueness)。

問題 116　$M_{2,2}$ を 2 行 2 列の行列全体の集合とする。この時、次の問に答えなさい。

1. $M_{2,2}$ には、零元の性質を満す元は一つしかないことを証明しなさい (零元の uniqueness [ユニークネス:唯一性])。
2. $M_{2,2}$ の零元を求めなさい。
3. 任意の行列 A に対して、その 0 倍した元 $0A$ は、零元であることを証明しなさい。
4. 任意の行列 A に対して、その逆元は、それぞれ一つしかないことを証明しなさい (逆元の uniquenss)。
5. 行列 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ の逆元 $-A$ を求めなさい。
6. 任意の行列 A 対して、その (-1) 倍した行列 $(-1)A$ は、その行列の逆元であることを証明しなさい。

問題 117　$M_{2,2}$ を 2 行 2 列の行列全体の集合とする。この時、次の問に答えなさい。

1. 任意の三つの行列 $A, B, C (\in M_{2,2})$ に対して、 $(AB)C = A(BC)$ が成立することを示しなさい。

2. もし、任意の行列 $A \in M_{2,2}$ に対して、$AE_1 = A$ となる行列 E_1 と、$E_2A = A$ となるような行列 E_2 が、共に、$M_{2,2}$ の中に存在すれば、実は、この二つの E_1, E_2 は、同じ行列であることを証明せよ。

3. 任意の行列 $A \in M_{2,2}$ に対して、$AE = EA = A$ となる行列 E ($M_{2,2}$ の単位行列と呼ぶ) を (一つ) 求めなさい。

4. 単位行列の性質を満す要素は $M_{2,2}$ には、一つしかないことを示しなさい。(ヒント: 単位行列の性質 [$AE' = E'A = A$] を満す行列 E' があると、それは、一つ前の問題で求めた行列 E と同じになることを示せばよい。)

5. ある行列 A に対して、$AB = E,\ CA = E$ を満す、行列 B, C が存在すれば、実は、$B = C$ であることを示しなさい。

6. ある行列 A に対して、$AX = XA = E$ を満すような行列 X が、$M_{2,2}$ に存在するときに、その行列 X を 行列 A の逆行列と呼び A^{-1} で表す。もし、行列 A に対して、その逆行列 A^{-1} が存在すれば、それは、一つしかないことを示しなさい。

7. 零行列 $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ には、逆行列が存在しないことを示しなさい。

8. 二つの行列 A, B が共に、逆行列を持つならば、二つの行列の積 AB も逆行列を持つことを示しさい。また、この時、AB の逆行列 $(AB)^{-1}$ を、A, B の逆行列 A^{-1}, B^{-1} を用いて表しなさい。

9. 行列 A が逆行列 A^{-1} をもてば、A を $n (n \in \boldsymbol{N})$ 回掛けあわせた行列 A^n も逆行列を持つことを示しなさい。また、A^n の逆行列 $(A^n)^{-1}$ を A^{-1} (と n) を用いて表しなさい。

問題 118　$M_{2,2}$ を 2 行 2 列の行列全体の集合とする。すなわち、

$$M_{2,2} = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \middle| a_{ij} \in \boldsymbol{R} \right\}$$

とした時、$M_{2,2}$ は、線型空間になっていることを示しなさい。
(ヒント:線型空間の公理 (8 つある) が、全て成立することを示せばよい)

問題 119
複素数全体の集合 $\boldsymbol{C}$ の要素 $\boldsymbol{x} = a + bi, \boldsymbol{y} = c + di$ と 実数 e に関して、普通に和 $(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = (a + c) + (b + d)i)$ と、定数倍 ($e\boldsymbol{x} = (ea) + (eb)i$) を考えると、$\boldsymbol{C}$ 全体は、実数上の線型空間になっていることを確かめなさい。
(ヒント:線型空間の公理 (8 つある) が、全て成立することを示せばよい)

問題 120　実数係数の二次式全体の集合を $R_2[x] = \{ax^2 + bx + c | a, b, c \in \boldsymbol{R}\}$ と表すことにする。この時、$R_2[x]$ の二つの要素 $\boldsymbol{f} = f(x) = ax^2 + bx + c, \boldsymbol{g} = g(x) = ux^2 + vx + w$ と、実数 h に対して、普通に、和 $(\boldsymbol{f} + \boldsymbol{g} = (a + u)x^2 + (c + v)x + (c + w))$ と、定数倍 ($h\boldsymbol{f} = (ha)x^2 + (hb)x + (hc)$) を考えるとき、$R_2[x]$ が、実数上の線型空間になっていることを確かめなさい。
(ヒント:線型空間の公理 (8 つある) が、全て成立することを示せばよい)

問題 121　三角関数の和の集合 $F[x] = \{a \cos x + b \sin x | a, b \in \boldsymbol{R}\}$ と表すことにする。この時、$F[x]$ の二つの要素 $\boldsymbol{f} = f(x) = a \cos x + b \sin x, \boldsymbol{g} = g(x) = c \cos x + d \sin x$ と、実数 e に対して、普通に、和 $(\boldsymbol{f} + \boldsymbol{g} = (a + c) \cos x + (b + d) \sin x)$ と、定数倍 ($e\boldsymbol{f} = (ea) \cos x + (eb) \sin x$) を考えるとき、$F[x]$ が、実数上の線型空間になっていることを確かめなさい。
(ヒント:線型空間の公理 (8 つある) が、全て成立することを示せばよい)

問題 122　問題 121 で定義された集合 $F[x]$ に対して、次の問いに答えなさい。

1. $F[x]$ の要素 $f(x) = a \cos x + b \sin x$ に対して、これを x で微分した関数 $f'(x)$ が、再び、$F[x]$ に入ることを示せ。
2. $F[x]$ の要素 $f(x)$ に対して、$f'(x)$ を対応させる変換 D が線型変換であることを示せ。

問題 123　平面ベクトル全体の集合 V^2 上の線型変換全体の集合を $F[V^2]$ とする。$F[V^2]$ の要素 T, S 並びに実数 c に対して、和 $(T + S)$ と定数倍 (cT) を、それぞれ $(T + S)(\boldsymbol{v}) = T(\boldsymbol{v}) + S(\boldsymbol{v}),\ (cT)(\boldsymbol{v}) = c(T(\boldsymbol{v}))$ と定義すると、$F[V^2]$ は線型空間になっていることを示せ。
(ヒント:線型空間の公理 (8 つある) が、全て成立することを示せばよい)

問題 124

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

とした時、$\boldsymbol{K}^n$ の標準基底 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ に対し、$A\boldsymbol{e}_i$ $(1 \leqq i \leqq n)$ を計算し、

$$A = (A\boldsymbol{e}_1\ A\boldsymbol{e}_2\ \cdots A\boldsymbol{e}_n)$$

となることを示せ。

問題 125　次の図の様に、A 〜 O の間に道がある時に次の問に答えなさい。

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
A & - & - & B & & & C & & & & & & & & \\
| & & & | & & & | & & & & & & & & \\
| & & & | & & & | & & & & & & & & \\
D & - & - & E & - & - & F & - & - & G & & & & & \\
 & & & | & & & | & & & | & & & & & \\
 & & & | & & & | & & & | & & & & & \\
 & & & H & - & - & I & & & | & & J & - & - & K \\
 & & & | & & & & & & | & & | & & & \\
 & & & | & & & & & & | & & | & & & \\
 & & & L & - & - & - & - & - & M & & N & - & - & O
\end{array}
$$

1. 行列 $X = (x_{\alpha\beta})$ (但し $\alpha =$ A 〜 O, $\beta =$ A 〜 O) とし、

$$
x_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1 & (\alpha \text{ と } \beta \text{ の間に道がある時}) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}
$$

   と定める時 (例えば、A と B の間には道があるので x_{AB} は 1、A と C の間には道がないので、x_{AC} は 0 となる) の X を求めなさい。

2. $Y = (y_{\alpha\beta}) = X^2$ とした時に、$y_{\alpha\beta}$ の値は、どんな意味を持つか ?

3. D から、丁度 4 回、道を渡った時に到達する (但し、同じ場所や同じ道を何度通っても良いとする) ことができる場所はどことどこか ? また、その時、そこに到る道の種類は全部で何通りか ?

問題 126　演習書の p.10 の類題 4 を解きなさい。

問題 127　演習書の p.12 の類題 6 を解きなさい。

問題 128　A, B, X を n 次行列、E を n 次の単位行列とするとき、次の問に答えなさい。

1. A が正則ならば、$AX = B$ を満す行列 X は一意に決ることを示しなさい。

2. $E - A$ が正則ならば、$\displaystyle\sum_{i=0}^{k} A^i = (E - A^{k+1})(E - A)^{-1}$ であることを示しなさい。

問題 129

1. 正方行列 A の左右から正則行列 P, Q をかけたところ $PAQ = E$ となったとする (ただし、E は単位行列である。)。A は正則行列であることを示し、A^{-1} を P, Q を用いて表わせ。

2. 正方行列 A に行および列に関する基本変形を何回か施したところ単位行列になったとする。このとき、A は正則行列であることを示せ。