代幾 I 演習 (2008/10/16)

【群の定義】集合 G の元 a, b に対し、**積**と称する第三の元 (これを ab で表す。また、a, b から ab を求める操作を ***(二項)* 演算** と呼ぶ。) が定まり、次の三つの命題 (この三つの命題を**群の公理** と呼ぶ。) を満すとき、G は (その積を求める演算に関して) **群** (group) であるという (cf. 教科書 p.248 参照)。

1. (結合法則) $\forall a, b, c \in G\,[(ab)c = a(bc)]$
2. (単位元の存在) **単位元** と称する特別な元 e がただ一つ存在して、G の全ての元 a に対して $ae = ea = a$ が成立する 。
3. (逆元の存在) G の任意の元 a に対して、$ax = xa = e$ となるような元 x が存在する。これを a の **逆元** と呼び a^{-1} で表す。

与えられた**集合と演算の組**が、**群になっているかどうか**は、その集合と演算が、上記の**群の公理 *(*三つの命題*)* が成立するかどうかを確認する**事で判定できる。群になるためには、三つの命題の全てが成立する必要があるが、逆に一つでも成立しない命題があれば群でない[1]。

[例題 1] 整数全体 $\boldsymbol{Z}$ は、加法 (+) に関して、群である。

(proof) 以下のようにして、$\boldsymbol{Z}$ 上で、加法は群の三つの公理を全て満すことが解るので、$\boldsymbol{Z}$ は加法に関して群を成す。

1. $\forall a, b, c \in \boldsymbol{Z}$に対して $(a+b)+c = a+(b+c)$ なので、**結合法則**を満す。
2. $0 \in \boldsymbol{Z}$ であり、$\forall a \in \boldsymbol{Z}$に対して $a+0 = 0+a = a$ なので、0 は $\boldsymbol{Z}$ の加法に対する **単位元** である。
3. $\boldsymbol{Z}$ の任意の要素 a に対して、$x = -a$ とすれば、$x = -a \in \boldsymbol{Z}$ であり、$a + x = a + (-a) = 0, x + a = (-a) + a = 0$ となるので、$x = -a$ は、a の**逆元**となる。すなわち、$\boldsymbol{Z}$ の任意の要素に対して、逆元が存在する。

[例題 2] 自然数 $\boldsymbol{N}$ は、加法 (+) に関して、群にならない。

(proof) $\boldsymbol{N}$ の中には、$1 + x = 1$ [2]となる様な x が存在しない (もし、$1 + x = 1$ とすると、$x = 0$ とならなければならないが、0 は $\boldsymbol{N}$ に含まれない[3])。したがって、単位元が ($\boldsymbol{N}$ の中に..) 存在しない。すなわち、群の公理の二つ目の性質 (単位元の存在) を満さないので、$\boldsymbol{N}$ は、加法 (+) に関して、群にならない。

---

[1] ここでは、「群かどうかの判定」だけを問題とする。「群の性質」や、「群の応用」については、二年生以後で学ぶことになる。

[2] **成立しない**事を示す一番簡単な方法は、「**反例**を示す」事である。反例は、「**成立しない例**であれば何でも構わない」 ので、ここでは、「1 に関する単位元の不在」を取り上げている。しかし、勿論これに限るわけではなく、例えば「2 に関する単位元の不在」でも構わない。

[3] ここでは、「自然数」を高校までと同様「正の整数 ($\boldsymbol{N} = \{1, 2, 3, ...\}$)」と考えることにする。ただし、大学の数学では、自然数に 0 を含めるの普通である (仮に、大学流に、0 を自然数に含めた所で、逆元が存在しないので、いずれにせよ群にはならないが..)。

[例題 3] 自然数 $\boldsymbol{N}$ は、乗法 $(\times)$ に関して、群にならない。

(proof) $\boldsymbol{N}$ の乗法に関する単位元は 1 である (これは $\boldsymbol{N}$ に含まれる) が、$2 \times x = 1$ となる x は $\boldsymbol{N}$ に含まれないので、2 に対する逆元が $\boldsymbol{N}$ に含まれない。すなわち、群の三つ目の公理 (逆元の存在) が成立しないので、$\boldsymbol{N}$ は、乗法に関して群にならない。

[例題 4] 有理数全体の集合 $\boldsymbol{Q}$ から 0 を取り除いた集合を $\boldsymbol{Q}^*(= \boldsymbol{Q} - \{0\})$ とすると、$\boldsymbol{Q}$ は、乗法 $(\times)$ に関して、群になる。

(proof) 以下のようにして、$\boldsymbol{Q}^*$ 上で、乗法は群の三つの公理を全て満すことが解るので、$\boldsymbol{Z}$ は加法に関して群を成す。

1. $\forall a, b, c \in \boldsymbol{Q}^*$に対して $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$ なので、結合法則を満す。
2. $1 \in \boldsymbol{Q}^*$ であり、 $\forall a \in \boldsymbol{Q}^*$に対して $a \times 1 = 1 \times a = a$ なので、1 は $\boldsymbol{Q}^*$ の乗法に対する **単位元** である。
3. $\boldsymbol{Q}^*$ の任意の要素 a に対して、$x = 1/a$ とすれば、$x = 1/a \in \boldsymbol{Q}^*$ であり ($0 \notin \boldsymbol{Q}^*$ であることに注意。)、$a \times x = a \times (1/a) = 1, x \times a = (1/a) \times a = 1$ となるので、$x = 1/a$ は、a の逆元となる。すなわち、$\boldsymbol{Q}^*$ の任意の要素に対して、逆元が存在する。

これらを参考に、次の問題を解きなさい。

問題 138

1. 複素数全体の集合 $\boldsymbol{C}$ は、加法に関して群となることを示せ。
2. 複素数全体の集合 $\boldsymbol{C}$ は、乗法に関して群とならないことを示せ。
3. 複素数全体の集合 $\boldsymbol{C}$ から 0 を取り除いた集合 $\boldsymbol{C}^*(= \boldsymbol{C} - \{0\})$ は、乗法に関して群になることを示せ。

問題 139　　複素数全体の集合 $\boldsymbol{C}$ から -2 を取り除いた集合 $\boldsymbol{C}^*(= \boldsymbol{C} - \{-2\})$ 上の演算 $(\cdot)$ を $x \cdot y = (x+2)(y+2) - 2$ と定義する。ここで、$\boldsymbol{C}^*$ は $(\cdot)$ に関して群を成すことを示すために、以下の問いに答えよ。

1. 演算 $\cdot$ が結合法則を満す。すなわち $\forall x, y, z \in \boldsymbol{C}^*[(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)]$ であることを示せ。
2. 演算 $\cdot$ の単位元、即ち $\forall x \in \boldsymbol{C}^*[x \cdot e = e \cdot x = x]$ となる e を求めよ。
3. $a(\in C^*)$ の逆元、即ち $a \cdot x = x \cdot a = e$ となる x を a を用いて表せ。

問題 140　　K (K は C(複素数) あるいは、R(実数) を考えている。) を成分とする n 次の正方行列全体の集合 $M_{n,n}(K) = \{A | A$ は n 次正方行列 $\}$ は、行列の足し算に関して、群になることを示しなさい (ヒント : 上記の三つの公理をみたしていることをそれぞれ示せばよい。) 。

問題 141　n 次の正方行列全体の集合 $M_{n,n}(K)$ は、行列の掛け算に関して、群になっていないことを示しなさい (ヒント：上記の三つの公理の少くても一つは成立していないので、その成立していない公理を示し、どのような場合に成立していないかを述べればよい。)。

問題 142　n 次の正則行列全体の集合 $GL(n,K)=\{A|A$ は n 次の正方行列で、逆行列を持つ$\}$ は、行列の掛け算に関して、群になることを示しなさい。

問題 143　n 次の正則行列全体の集合 $GL(n,K)$ は、行列の足し算に関して、群になっていないことを示しなさい。

問題 144　演習書の p.17 の類題 11 を解きなさい。

問題 145　演習書の p.73 の類題 2 を解きなさい。

問題 146　n 次のエルミート行列全体の集合 E は、行列の掛け算に関して、群になっていないことを示しなさい。

問題 147　n 次のユニタリ行列全体の集合 U は、行列の掛け算に関して、群になることを示しなさい。

問題 148　n 次のエルミート行列全体の集合 E は、行列の足し算に関して、群になることを示しなさい。

問題 149　n 次のユニタリ行列全体の集合 U は、行列の足し算に関して、群になっていないことを示しなさい。

問題 150

非負の整数全体の集合 Z^+ に対して、次のように定義された、二つの数の差の絶対値を取る演算 $(\cdot)$ を考える。この時 Z^+ は、この演算 $(\cdot)$ に関して、群になっていないことを示しなさい。

$$x \cdot y = |x-y|$$

問題 151　演習書の p.18 の 1 章の問題の 1.1 を解きなさい。

問題 152　演習書の p.18 の 1 章の問題の 1.2 を解きなさい。

問題 153　n の置換全体の集合は、置換の合成に関して、群[4]になることを示せ。

[4] この群を「n 次の対称群」と呼び S_n で表します。

問題 154　偶置換全体の集合[5]は、置換の合成に関して、群になる[6] ことを示せ。

問題 155　G を平面上の合同変換[7]全体の集合とする。この時、次の問いに答えなさい。

1. $T, S \in G$ (すなわち、T, S が合同変換) の時、T, S の合成 $T \cdot S$ (ここでは $T \cdot S(x) = T(S(x))$ と定義する) もまた、合同変換 (すなわち、$T \cdot S \in G$) であること示せ。
2. 任意の $T, S, U \in G$ に対し、$(T \cdot S) \cdot U = T \cdot (S \cdot U)$ を示せ。なお、この時、教科書 p.63 の定理 [7.1] を利用してよい。
3. 任意の $T \in G$ に対し、$(T \cdot E) = E \cdot T = T$ となる合同変換 E とは何か、言葉で説明しなさい。
4. 任意の $T \in G$ に対して、ある $S \in G$ が存在し、前問の E に対して、$T \cdot S = S \cdot T = E$ となることを示せ。
5. G は、合成 $(\cdot)$ に関して群になることを示せ。

問題 156　G を平面上の運動[8]全体の集合とする。この時、G は、変換の合成に関して群になることを示せ。

問題 157　G を平面上の回転[9]全体の集合とする。この時、G は、変換の合成に関して群になることを示せ。

問題 158　G を平面上のアフェイン変換[10]全体の集合とする。この時、G は、変換の合成に関して群になることを示せ。

問題 159

1. A が直交行列ならば $\det A = \pm 1$ であることを示せ。
2. A がエルミート行列ならば $\det A$ は実数であることを示せ。
3. A がユニタリ行列ならば $\det A$ は絶対値が 1 の複素数であることを示せ。

問題 160　n の置換の個数が、$n!$ [11] であることを示せ。

---

[5]偶置換全体は、置換全体の部分集合になっている。このように、ある群の部分集合が、同じ演算に関して、やはり群をなす場合に、この部分集合を「部分群」と呼ぶ。すなわち、偶置換全体の集合は、置換全体の集合の部分群である。

[6]この群を「n 次の交代群」と呼び A_n で表します。

[7]教科書 p.68 を参照

[8]教科書 p.69 参照

[9]教科書 p.69 参照

[10]教科書 p.70 参照

[11]$n!$ は n の階乗と呼び、$n! = n \times (n-1) \times .. \times 2 \times 1$ である。