代幾 I 演習 (2008/10/30)

[行列の冪と冪零[1]]

n 次正方行列 A に対して、A を k 回掛けた結果を A の k 回の**冪 (巾)** と呼び A^k で表す。特に、任意の行列に対して $A^0 = E$ (E は単位行列) と定める[2]。

n 次正方行列 A に対して、ある自然数 $k > 0$ が存在して $A^k = O$(O は零行列) である時、この行列 A は、**冪（巾）零行列**と呼ぶ[3]。また、冪零行列 A に対して、k より小さい数では、O にならないが、k で初めて、O になる時、この k を冪零行列 A の**次数**と呼ぶことにする。なお、O (零行列) の次数は 1 であり、逆に、次数が 1 の冪零行列は O のみである。

問題 186

行列 A, B が共に冪零行列で、その次数を、それぞれ k, j であるとする。さらに、この二つの行列が $AB = BA$ を満す時、次の問に答えなさい。

1. 二つの行列の積 AB が冪零行列であることを示し、その次数の最大値[4]m を k, j で表しなさい。また、実際に、AB の次数が m になる例と、ならない[5]例をそれぞれ示しなさい。

2. 二つの行列の和 $A + B$ が冪零行列であることを示し、その次数の最大値 m を k, j で表しなさい。また、実際に、$A + B$ の次数が m になる例と、ならない例をそれぞれ示しなさい。

問題 187　次のような n 次の正方行列 $J_n = \{\delta_{i,i-1}\}$ が冪零行列であることを示し、その次数を求めなさい。

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

問題 188　演習書の p.19 の 1 章の問題の 1.9 を解きなさい。

問題 189　行列 A が冪零行列ならば、$|A| = 0$ を示せ。

---

[1]「冪」、「冪零」は、それぞれ「べき」、「べきれい」と呼ぶ。
[2]$O^0 = E$ であることに注意。
[3]教科書 p.71 章末問題 6. を参照のこと。
[4]必ず、$(AB)^m = O$ となる様な m の内、最小の数を求める。次の問いも同様。
[5]m は、次数の最大値なので、m より小さい数で O になってしまう場合があり得る。

問題 190　A が冪零行列の時、e^A を次のように定義する[6]。

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n$$

この時、次の問に答えなさい。

1. $e^O = E$ であることを示しなさい。ただし、O, E はそれぞれ、零行列、単位行列とする。
2. 冪零行列 A, B が、$AB = BA$ を満すならば、e^A と e^B の積 $e^A e^B$ が $e^{(A+B)}$ になることを示しなさい。
3. e^A は正則であることを示しなさい。
4. 正則な行列 Q に対して、$e^{(Q^{-1}AQ)} = Q^{-1}(e^A)Q$ を示しなさい。

問題 191　A を正則な行列、k, l を整数とする時、次の等式を示しなさい。

1. $A^l A^k = A^{l+k}$
2. $(A^l)^k = A^{lk}$

問題 192　n の置換 σ は次のような互換の積で、一意に表すことができることを示せ。ただし、$p_i > q_i$, $p_i > p_{i+1}$, $k < n$ となる。

$$\sigma = (p_1, q_1)(p_2, q_2)..(p_k, q_k)$$

問題 193　演習書の p.11 の類題 5 を解きなさい。

問題 194　n 次行列 $J_n = (\delta_{i,n-j+1})(1 \leq i, j \leq n)$ (ただし、$\delta_{i,j}$ はクロネッカーのデルタで、$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & (i = j \text{ の時}) \\ 0 & (\text{その他の時}) \end{cases}$ と定義されている) について、次の問に答えなさい。

1. n 次の正方行列 $A = (a_{ij})$ に対して AJ_n を求めなさい。
2. n 次の正方行列 $A = (a_{ij})$ に対して J_nA を求めなさい。
3. J_n は、正則行列であることを示し、その逆行列 J_n^{-1} を求めなさい。

問題 195　演習書の p.25 の類題 1 を解きなさい。

問題 196　演習書の p.27 の類題 3 を解きなさい。

[6] 形式的には無限和だが、A が冪零なので、実質は有限和であることに注意